

PRÓBAÉRETTSEGI • 2004. május

--	--	--	--	--	--	--

# MATEMATIKA

EMELT SZINT

## JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

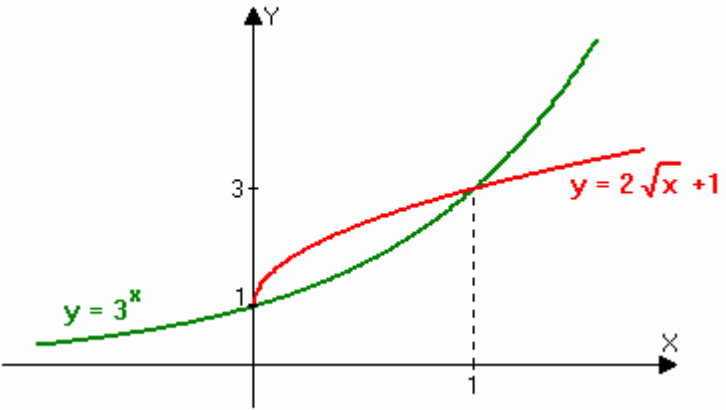


### Formai előírások:

- A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől eltérő színű tollal kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
- A feladatok mellett található téglalapok közül az elsőben a feladatra adható pontszám van, a javító által adott pontszám a második téglalapba kerül.
- Kifogástalan megoldás esetén elég a megfelelő maximális pontszám beírása a téglalapba.
- Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes jól megoldott *részekre adott pontszámokat* is tüntesse fel a dolgozatban az adott helyen.

### Tartalmi kérések:

- Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól *eltérő megoldás* születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit és ennek alapján pontozzon.
- A pontozási útmutató pontjai tovább *bonthatók*. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
- Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél *kevésbé részletezett*.
- Ha a megoldásban *számolási hiba*, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
- *Elvi hiba* esetén, egy gondolati egységen belül a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban az elhibázott részt egy újabb részkérdés követi, és a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot.
- Egy feladatra adott megoldások közül csak egy (a magasabb pontszámú) értékelhető.
- A megoldásokért jutalompont (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) nem adható.
- Az olyan részszámításokat, részlépéseket, amelyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel, az elbíráláskor nem kell figyelembe venni.
- Ha a pontozási útmutató a feladat ellenőrzéséért pontot ad, akkor az csak abban az esetben adható meg, ha a vizsgázó valamilyen formában írásban rögzíti az ellenőrzés tényét. (Itt minden elvileg helyes módszer elfogadható.)
- A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben– feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, melynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani, csak a többi feladatot. Ha *mégsem derül ki egyértelműen*, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a *nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat* lesz.

<b>1.</b>		
		
A megoldást a két függvény közös értelmezési tartományán, az $x \geq 0$ számhalmazon keressük.	1 pont*	<i>Ez a pont akkor is jár, ha az ért. tart. nincs ugyan külön feltüntetve, de a vizsgázó helyesen olvassa le a megoldáshalmazt.</i>
$x \mapsto 3^x$ grafikonja	3 pont	
$x \mapsto \sqrt{x}$ grafikonja	1 pont	<i>Az <math>x \mapsto 2\sqrt{x} + 1</math> függvény grafikonjáért összesen 4 pont jár. Ennyit kap akkor is a vizsgázó, ha nem lépésenként ábrázolja a függvényt.</i>
$x \mapsto 2\sqrt{x}$ grafikonja	2 pont	
$x \mapsto 2\sqrt{x} + 1$ grafikonja	1 pont	
A metszéspontok leolvasása: $x = 0$ és $x = 1$	2 pont	
Az egyenlőtlenség megoldása: $0 < x < 1$	1 pont*	<i>* Az egyenlőtlenség megoldáshalmazáért összesen 2 pont jár. Ha a válasz <math>x &lt; 1</math>, de külön feltüntette a közös értelmezési tartományt, akkor 1 pontot kap, ha az <math>x &lt; 1</math> válasz e nélkül szerepel, akkor nem kap pontot.</i>
<b>Összesen</b>	<b>11 pont</b>	

*Ha a vizsgázó mindkét grafikont rosszul rajzolja fel, és a megoldáshalmazt annak megfelelően olvassa le, 4 pontot kapjon!*

<b>2.</b>		
<b>a)</b>		
Az első és az ötödik dobás kivételével mindegyik dobás 6-féle kimenetelű lehet, ez összesen $6^4 = 1296$ lehetőség.	2 pont	<i>A kijelölt művelet elvégzése nélkül is 2 pont.</i>
Az első dobás csak egyféle, az ötödik azonban kétféle lehet, így összesen $2 \cdot 6^4 = 2592$ lehetőség van.	2 pont	<i>A kijelölt művelet elvégzése nélkül is 2 pont.</i>
<b>Összesen</b>	<b>4 pont</b>	
<b>b)</b>		
Mivel most nem ismétlődhet egyik dobás sem, csak $2 \cdot 4! = 48$ lehetőség van.	4 pont	
<b>Összesen</b>	<b>4 pont</b>	
<b>c)</b>		
Az első dobás eldönti, hogy mit keresünk.	2 pont	
A 2. dobás $\frac{1}{6}$ valószínűséggel lesz ugyanaz.	2 pont	
<i>VAGY:</i> Két egymást követő dobásnak $6 \cdot 6 = 36$ -féle egyenlően valószínű kimenetele van, ezek közül csak 6 kedvező, amelyben a 6 különböző jel közül valamelyik megismétlődik. A keresett valószínűség tehát $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ .	1 pont 1 pont 2 pont	<i>Jó gondolatmenetet tükröző helyes válasz esetén szöveges részletezés nélkül is 4 pont jár.</i>
<b>Összesen</b>	<b>4 pont</b>	

<b>3.</b>		
A játék előtt $4x$ , $5x$ , $6x$ tallérjuk volt.	2 pont	
A játék után $5y$ , $6y$ , $7y$ .	2 pont	
Az összes pénzmennyiség nem változott, ezért $15x = 18y$ , ahonnan $y = \frac{5}{6}x$	2 pont	
A játék utáni pénzek $x$ -szel kifejezve: $5 \cdot \frac{5}{6}x = \frac{25}{6}x$ , $6 \cdot \frac{5}{6}x = 5x$ és $7 \cdot \frac{5}{6}x = \frac{35}{6}x$	2 pont	
Csak az első játékos nyert, nyereménye $\frac{1}{6}x = 12$ tallér, így $x = 72$ tallér.	2 pont	
A játék elején $288$ , $360$ , $432$ tallérjuk volt.	3 pont	
Ezek aránya valóban $4:5:6$ , a játék végén pedig $300$ , $360$ és $420$ tallér, ezek aránya $5:6:7$ .	1 pont	

VAGY: Az összesen $[(4 + 5 + 6); (5 + 6 + 7)] = 90$ egységnyi pénzből,	2 pont	
a játék előtt $\frac{24}{90}; \frac{30}{90}; \frac{36}{90}$ egységnyi volt egy-egy játékosnál,	2 pont	
a játék után pedig $\frac{25}{90}; \frac{30}{90}; \frac{35}{90}$ egységnyi.	2 pont	
Az első játékos nyert 12 tallért, ami $\frac{1}{90}$ egységnyi,	2 pont	
ezért az összes pénz $12 \cdot 90 = 1080$ tallér,	2 pont	
és így a játék előtt rendre 288; 360; 432 tallérjuk volt.	3 pont	
Ellenőrzés a szöveggel.	1 pont	
<b>Összesen</b>	<b>14 pont</b>	

<b>4.</b>		
<p style="text-align: center;"><math>r_1 = \sqrt{2} + 1</math></p>		
<b>a)</b>		
Az $r_2$ sugarú kör $P$ középpontja illeszkedik az $O$ középpontot az $E$ érintési ponttal összekötő sugárra.	2 pont	<i>Ha csak a rajzon jelöli, akkor is jár a 2 pont.</i>
Az $OPT$ egyenlőszárú derékszögű háromszögben $OP = r_2 \sqrt{2}$ .	2 pont	
Az $OPE$ szakaszon $r_2 \sqrt{2} + r_2 = \sqrt{2} + 1$ .	2 pont	
Innen $r_2 = 1$ .	1 pont	
<b>Összesen</b>	<b>7 pont</b>	
<b>b)</b>		
Az $O, S, Q, F$ pontok egy egyenesbe esnek, így $QS = OF - OS - r_3 = \sqrt{2} + 1 - 1 - r_3$ .	2 pont	
A $PQS$ derékszögű háromszögben $PQ = r_2 + r_3$ .	1 pont	
A $PQS$ derékszögű háromszögre felírva a Pitagorasztételt: $1^2 + (\sqrt{2} - r_3)^2 = (1 + r_3)^2$ .	2 pont	
Az egyenletet rendezve: $r_3 = \frac{2}{2 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$ .	2 pont	<i>Gyöktelenítés nélkül is 2 pont.</i>
<b>Összesen</b>	<b>7 pont</b>	

<b>5.</b>		
Az értelmezési tartomány: $x > 0, x \neq \frac{1}{3}, x \neq \frac{1}{9}$	1 pont*	
Térjünk át 3 alapú logaritmusra: $\frac{\log_3 3}{\log_3 3x} + \frac{4 \cdot \log_3 3}{\log_3 9x} = 6,$	2 pont	
azaz $\frac{1}{\log_3 3x} + \frac{4}{\log_3 9x} = 6.$	1 pont	
A szorzat logaritmusára vonatkozó azonosságot alkalmazva $\frac{1}{\log_3 3 + \log_3 x} + \frac{4}{\log_3 9 + \log_3 x} = 6.$	2 pont	
Azaz $\frac{1}{1 + \log_3 x} + \frac{4}{2 + \log_3 x} = 6.$	1 pont	
Rendezve $6 \cdot \log_3^2 x + 13 \cdot \log_3 x + 6 = 0.$	2 pont	
Innen $\log_3 x = -\frac{2}{3}$ vagy $\log_3 x = -\frac{3}{2}.$	2 pont	
így $x = 3^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}.$	2 pont	
vagy $x = 3^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{27}}.$	2 pont	
Mivel minden lépés ekvivalens átalakítás volt a lehetséges értelmezési tartományon és a kapott gyökök elemei az értelmezési tartománynak, mindkettő kielégíti az egyenletet.	1 pont*	
<i>VAGY:</i> <i>Ha <math>3x</math> alapú logaritmusra tér át, akkor</i> $\log_{3x} 3 + 4 \cdot \frac{\log_{3x} 3}{\log_{3x} 9x} = 6$	3 pont	
$\log_{3x} 3 + 4 \cdot \frac{\log_{3x} 3}{1 + \log_{3x} 3} = 6$	3 pont	
$\log_{3x}^2 3 - \log_{3x} 3 - 6 = 0$	2 pont	
$\log_{3x} 3 = 3$ vagy $\log_{3x} 3 = -2$	2 pont	
$x = 3^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$	2 pont	
vagy $x = 3^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{27}}$	2 pont	
<i>Ellenőrzés, ért. tart. vizsgálat.</i>	2 pont*	

<i>VAGY:</i> <i>Ha 10 alapú logaritmusra tér át, akkor</i>		
$\frac{\lg 3}{\lg 3 + \lg x} + \frac{4 \lg 3}{\lg 9 + \lg x} = 6$	3 pont	
$\frac{\lg 3}{\lg 3 + \lg x} + \frac{4 \lg 3}{2 \lg 3 + \lg x} = 6$	1 pont	
$6 \cdot \lg^2 x + 13 \cdot \lg 3 \cdot \lg x + 6 \cdot \lg 3 = 0$	4 pont	
$\lg x = -\frac{3}{2} \lg 3$ vagy $\lg x = -\frac{2}{3} \lg 3$	2 pont	
$x = 3^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$	2 pont	
vagy $x = 3^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{27}}$	2 pont	
<i>Ellenőrzés, ért. tart. vizsgálat.</i>	2 pont*	
<b>Összesen</b>	<b>16 pont</b>	

\*Az értelmezési tartomány vizsgálatáért és az ellenőrzésért összesen 2 pont adható.

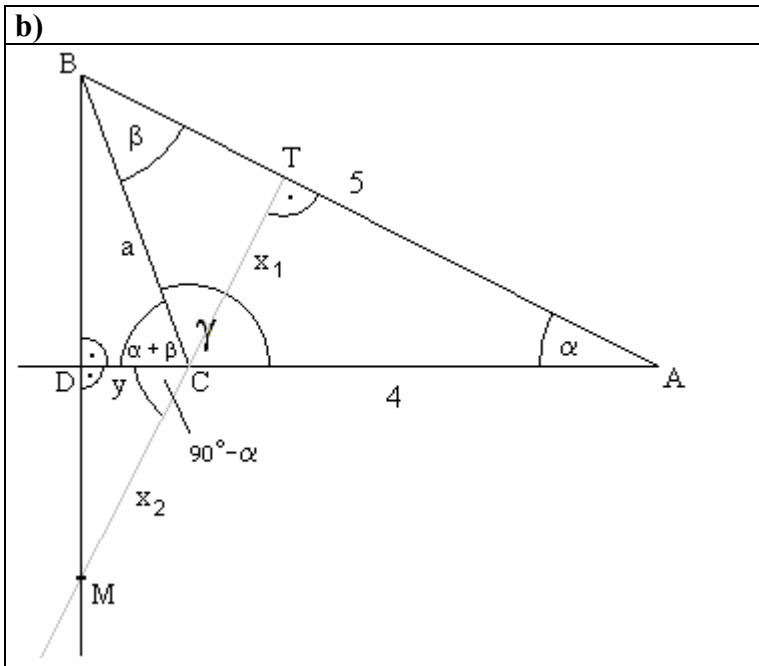
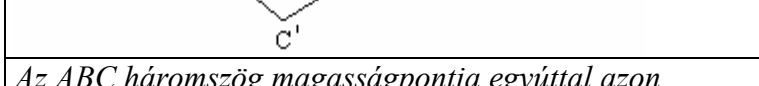
Hiányos értelmezési tartomány és ellenőrzésként azzal való összehasonlítás esetén: 1 pont.

Ha jól állapítja meg az értelmezési tartományt, de az eredményt nem veti össze vele: 1 pont.

Hiányos értelmezési tartomány és behelyettesítéssel való ellenőrzés esetén: 2 pont.

Ha nem vizsgálja az értelmezési tartományt, de behelyettesítéssel ellenőriz: 2 pont.

<b>6.</b>		
<b>a)</b>		
Koszinusztétellel $a = \sqrt{4^2 + 5^2 - 40 \cos 32^\circ} = 2,66$	2 pont	
A legnagyobb oldal $c$ , így a legnagyobb szög $\gamma$ .	1 pont	
A $\gamma$ lehet hegyes- vagy tompaszög, $\beta$ azonban mindenképpen hegyesszög, ezért először ezt számítjuk ki szinusztétellel, mert $0^\circ - 90^\circ$ között a szinuszfüggvény kölcsönösen egyértelmű.	2 pont	
$\sin \beta = \frac{b}{a} \cdot \sin \alpha = \frac{4}{2,66} \cdot \sin 32^\circ = 0,7967 \Rightarrow \beta = 52,82^\circ$	2 pont	
$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 95,18^\circ$	1 pont	
<i>VAGY:</i> <i>Koszinusztétellel <math>a = 2,66</math></i> <i>A legnagyobb szög <math>\gamma</math>,</i> <i>ami koszinusztétellel <math>\cos \gamma = \frac{4^2 + 2,66^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 2,66}</math></i>	2 pont 1 pont 3 pont	
<i>Tehát <math>\gamma = 95,18^\circ</math>.</i>	2 pont	
<b>Összesen</b>	<b>8 pont</b>	

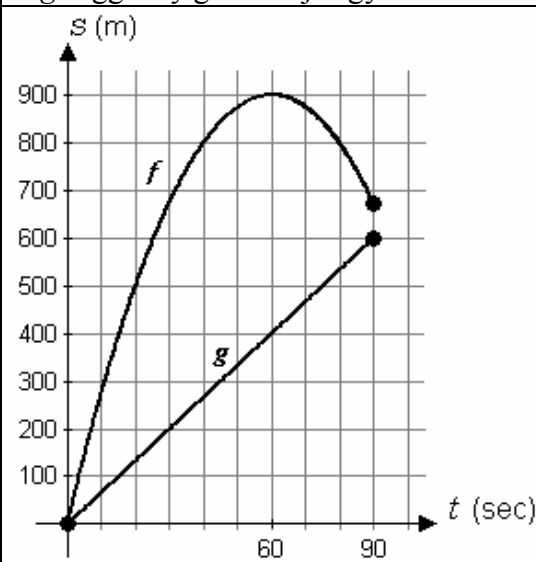
<p><b>b)</b></p> 		
<p>A <math>BTM</math> derékszögű háromszögben <math>MBT\angle = 90^\circ - \alpha</math></p>	2 pont	
<p>és <math>MT = BT \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)</math>.</p>	2 pont	
<p>A <math>BTC</math> derékszögű háromszögben  <math>BT = a \cdot \cos \beta = 2,66 \cdot \cos 52,82^\circ = 1,61</math></p>	2 pont	
<p>és így <math>MT = 1,61 \cdot \operatorname{tg} 58^\circ = 2,57</math>.</p>	2 pont	
<p>VAGY:          Az <math>ATC</math> derékszögű háromszögből <math>x_1 = 4 \cdot \sin 32^\circ = 2,12</math>.</p>	2 pont	
<p>A <math>DCB</math> derékszögű háromszögben  <math>DCB\angle = 180^\circ - \gamma = 84,82^\circ</math></p>	1 pont	
<p>és így <math>DC = 2,66 \cdot \cos 84,82^\circ</math>.</p>	1 pont	
<p>A <math>DCM</math> derékszögű háromszögben  <math>DCM\angle = 90^\circ - \alpha = 58^\circ</math></p>	1 pont	
<p>és így <math>DC = x_2 \cdot \cos 58^\circ</math>.</p>	1 pont	
<p><math>DC</math> két kifejezésének egyenlőségéből</p>	1 pont	
<p><math>x_2 = \frac{2,66 \cdot \cos 84,82^\circ}{\cos 58^\circ} = 0,45</math>.</p>		
<p>A keresett távolság <math>TM = x_1 + x_2 = 2,57</math>.</p>	1 pont	
<p>VAGY:</p> 		
<p>Az <math>ABC</math> háromszög magasságpontja egyúttal azon <math>A'B'C'</math> háromszög köré írható körének a középpontja, amelynek az <math>ABC</math> háromszög a középvonal-háromszöge.</p>	2 pont	



Az ABC háromszög köré írható körének középpontja $a = 2R \sin \alpha$ miatt $R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = 2,51$ , az $A'B'C'$ háromszög köré írható köré $2R = 5,02$ .	2 pont	
Az ABC háromszög területét kétféleképpen felírva $T = \frac{4 \cdot 5 \cdot \sin 32^\circ}{2} = \frac{5m}{2}$ .	1 pont	
Innen $m = 2,12$ .	1 pont	
Az MCB' derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel: $x = \sqrt{4R^2 - 25} = 0,45$ .	1 pont	
A keresett távolság $MT = 2,57$ .	1 pont	
<b>Összesen</b>	<b>8 pont</b>	

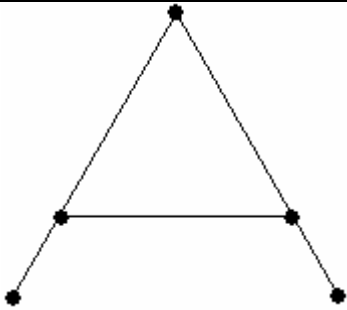
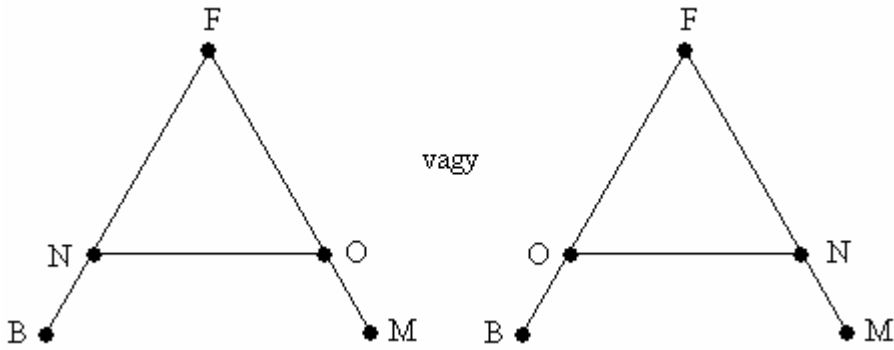
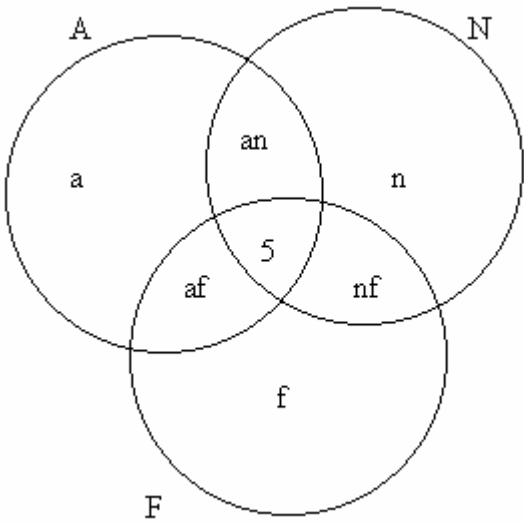
**Megjegyzések:**

1. A b) résznek koordináta-geometriai megoldása is lehetséges.
2. Ha a vizsgázó nem veszi észre, hogy a háromszög tompaszögű, de egyébként helyes összefüggésekkel számol, legfeljebb 12 pontot kaphat.

<b>7.</b>		
<b>a)</b>		
Koordináta-rendszer a megfelelő egységekkel	1 pont	<i>Értelmezési tartományon túli ábrázolásért 1 pontot vonjunk le!</i>
A $f$ függvény grafikonja parabolaív.	2 pont	
A $g$ függvény grafikonja egyenes szakasz.	1 pont	
		
<b>Összesen</b>	<b>4 pont</b>	
<b>b)</b>		
Az indulás után 1,5 perccel $t = 90$ s.	1 pont	<i>A mértékegység jelölése nélkül is jár a pont.</i>
$f(90) = 900 - \frac{1}{4}(90 - 60)^2 = 675$ méterre	1 pont	
$g(90) = \frac{20 \cdot 90}{3} = 600$ méterre	1 pont	
<b>Összesen</b>	<b>3 pont</b>	

<b>c)</b>		
A $f - g$ függvény jelentése: a két koci távolsága az indulástól eltelt idő függvényében.	3 pont	<i>Ha nem írja, hogy „az eltelt idő függvényében”, akkor is 3 pont.</i>
<b>Összesen</b>	<b>3 pont</b>	
<b>d)</b>		
$f(t) - g(t) = 900 - \frac{1}{4}(t - 60)^2 - \frac{20t}{3} =$	1 pont	
$= -\frac{1}{4}t^2 + \frac{70}{3}t$	1 pont	
Az $d(t) = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{70}{3}t$ függvény maximumhelyét keressük.		
Mivel az $x \mapsto ax^2 + bx + c$ függvény szélsőértékének helye $-\frac{b}{2a}$ ,	3 pont	<i>Ha a szélsőérték helyét az <math>f</math> és <math>g</math> függvény grafikonjáról olvassa le, akkor csak 1 pont.</i>
az $d(t)$ függvénynek $t = \frac{140}{3} \approx 46,7$ másodpercnél van a maximuma, ami beleesik a $[0; 90]$ intervallumba.	1 pont	<i>Ha nem írja le, hogy a 46,7 s eleme az ért. tart.-nak, akkor is 1 pont.</i>
<i>VAGY:</i>		
$f(t) - g(t) = 900 - \frac{1}{4}(t - 60)^2 - \frac{20t}{3} =$	1 pont	
$= -\frac{1}{4}t^2 + \frac{70}{3}t =$	1 pont	
$= -\frac{1}{4}\left(t - \frac{140}{3}\right)^2 + \frac{4900}{9}.$	3 pont	
<i>Ez az érték maximális, ha <math>t = \frac{140}{3} \approx 46,7</math> s.</i>	1 pont	
<i>VAGY:</i>		
$d(t) = f(t) - g(t) = 900 - \frac{1}{4}(t - 60)^2 - \frac{20t}{3} =$	1 pont	
$= -\frac{1}{4}t^2 + \frac{70}{3}t =$	1 pont	
$d'(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{70}{3}$	2 pont	
$d'(t) = 0$ , ha $t = \frac{140}{3}$ ,	1 pont	
és itt $d'(t)$ előjelet vált ( $+ \rightarrow -$ ), tehát $t = 46,7$ s maximumhely.	1 pont	
<b>Összesen</b>	<b>6 pont</b>	

<b>8.</b>		
<b>a)</b>		
<p>120 000 100 000 80 000 60 000 40 000 20 000 0</p> <p>1980 1990 2000</p> <p>■ Házasságkötések száma ■ Megszűnt házasságok száma</p>	4 pont	2 pont a tengelyek helyes feliratozásáért, 2 pont a két oszlopsorért.
<b>Összesen</b>	<b>4 pont</b>	
<b>b)</b>		
1980-ban 80 331 házasságkötésre 27 797 válás jutott, 1000 házasságkötésre tehát $\frac{27\,797}{80,331} = 346,0$ .	3 pont	
Hasonló számítással 1990-ben 374,8, 2000-ben pedig 560,4.	1 pont 1 pont	
<b>Összesen</b>	<b>5 pont</b>	
<b>c)</b>		
Ha 1980-ban $x$ ezer házasság volt érvényben, akkor erre $x \cdot 9,9$ válás jutott, tehát $x \cdot 9,9 = 27\,797$ .	2 pont	
Innen $x = 2\,807,7$ . Ezresekre kerekítve tehát 1980-ban 2808 ezer fennálló házasság volt.	1 pont	
Hasonló számítással 1990-ben 2514 ezer, 2000-ban 2257 ezer házasság volt.	2 pont	
<p>3 000 000 2 500 000 2 000 000 1 500 000 1 000 000 500 000 0</p> <p>1980 1990 2000</p> <p>■ Házasságok száma</p>	2 pont	
<b>Összesen</b>	<b>7 pont</b>	

<p><b>9.</b></p>		
<p>a)</p>		
	<p>3 pont</p>	
<p style="text-align: right;"><b>Összesen</b></p>	<p><b>3 pont</b></p>	
<p>b)</p>		
<p>Ha nem ismerték egymást, akkor mindkettőjüknek ismernie kellett a brit, a magyar és a francia vezetőt is, ami ellentmondás, hiszen a brit és a magyar vezetőnek csak egy-egy ismerőse volt. A német és az olasz vezető tehát biztosan ismerte egymást.</p>	<p>2 pont</p>	
<p>VAGY:</p>		
 <p>Mivel csak ez a kétféle ismeretségi rendszer lehetséges, a német és az olasz vezető biztosan ismerte egymást.</p>	<p>2 pont</p>	
<p style="text-align: right;"><b>Összesen</b></p>	<p><b>2 pont</b></p>	
<p>c)</p>		
		

A halmazábrán az egyes részhalmazok számosságát a beleírt betű, illetve betűpár jelenti. Az adatok szerint $a + n + f + an + nf + af + 5 = 55$ továbbá $a + an + af + 5 = 36$ $n + an + nf + 5 = 28$ $f + af + nf + 5 = 19$	1 pont	
Az utóbbi három egyenletet összeadva $a + n + f + 2(an + nf + af) + 15 = 83$ .	1 pont	
Ebből a legelső egyenletet kivonva: $an + nf + af + 10 = 28$ , azaz $an + nf + af = 18$ , vagyis 18-an beszéltek pontosan 2 nyelvet.	2 pont	
VAGY: <i>A logikaiszita-formula szerint</i> $ A \cup N \cup F  =  A  +  N  +  F  -$ $-( A \cap N  +  N \cap F  +  F \cap A ) +  A \cap N \cap F $	1 pont	
Az ismert adatokat beírva $55 = 36 + 28 + 19 - ( A \cap N  +  N \cap F  +  F \cap A ) + 5$	1 pont	
Azaz $( A \cap N  +  N \cap F  +  F \cap A ) = 33$	1 pont	
Ebben a számosságban a mindhárom nyelvet beszélők számossága háromszorosan szerepel, a pontosan két nyelvet beszélők száma tehát $33 - 15 = 18$ .	2 pont	
<b>Összesen</b>	<b>5 pont</b>	
<b>d)</b>		
Rendeljük hozzá minden résztvevőhöz az általa kötött új ismeretségek számát! Ha van akihez 0 tartozik, akkor a további 54 résztvevőhöz az 1,2,...53 számok valamelyikét kell hozzárendelni, hiszen saját magát mindenki ismeri, és a 0 új ismeretséget kötő résztvevővel senki sem kötött új ismeretséget. Így valamelyik szám két résztvevőhöz is tartozik majd. Ha a 0 senkihez sem tartozik, akkor az 1,2,...54 számokat kell kiosztanunk 55 résztvevő között, tehát megint csak lesz két azonos számot kapó résztvevő.	2 pont 2 pont 2 pont	<i>A vizsgázó a skatulyaelv alkalmazása helyett indirekt módon is bizonyíthat.</i>
<b>Összesen</b>	<b>6 pont</b>	