Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Alapkezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2006/2007-es tanév
első (iskolai) forduló
haladók – II. kategória
(nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók)

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyik az a legnagyobb kettőhatvány, amivel a $2^{2005} + 10^{2005}$ osztható?

Megoldás. Emeljünk ki a $2^{2005} + 10^{2005}$ összegből 2^{2005}-t. 1 pont

$$2^{2005} + 10^{2005} = 2^{2005}\left(1 + 5^{2005}\right).$$ 1 pont

Részpontszám: 2 pont

1. megoldás. Az $(1 + 5^{2005})$-t felbonthatjuk szorzat alakba az

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a + b) \cdot \left(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - + \ldots + b^{2k}\right)$$

azonosság szerint:

$$\left(1 + 5^{2005}\right) = (1 + 5)\left(5^{2004} - 5^{2003} + 5^{2002} - + \ldots + 1\right).$$ 2 pont

Az első zárójelben álló szám $(1 + 5) = 2 \cdot 3$, osztható 2-vel. 1 pont

A második zárójelben páratlan darab páratlan szám összege van, ezért a jobb oldali zárójelben lévő összeg páratlan. 1 pont

Tehát a 2^{2006} a legnagyobb kettőhatvány, amivel a $2^{2005} + 10^{2005}$ osztható. 1 pont

Részpontszám: 5 pont

2. megoldás. Az 5^{2005} és az 1 is páratlan szám, ezért összegük páros. 1 pont

Az 5 összes hatványa 25-re végződik. Ehhez egyet hozzáadva az összeg 26-ra végződik, ami 2-vel osztható, de 4-gyel nem, mert egy szám néggyel osztható, ha az utolsó két jegyéből álló szám osztható 4-gyel. 3 pont

Tehát 2006 a 2 legnagyobb kitevője, amivel a $2^{2005} + 10^{2005}$ osztható. 1 pont

Részpontszám: 5 pont

2. Két párhuzamos egyenes mindegyikén prímszám számú pontot jelöltünk meg. A megjelölt pontok – mint csúcsok – által meghatározott összes négyszög száma kétszerese a megjelölt pontok által meghatározott háromszögek számának. Hány pontot jelöltünk meg az egyeneseken?

Megoldás. Ha az egyik egyenesen n db, a másik egyenesen k db pont van megjelölve, akkor a négyszögek száma $\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{k(k-1)}{2}$, hiszen mindkét egyenesről két pontot kell választani. 1 pont

A megfelelő háromszögek száma $\frac{n(n-1)}{2} \cdot k + n \cdot \frac{k(k-1)}{2}$, mert az egyenesekről 1, illetve 2 db pont választható. 1 pont

A feltétel szerint

$$\frac{n(n-1) \cdot k(k-1)}{4} = 2\left(\frac{nk(n-1)}{2} + \frac{nk(k-1)}{2}\right).$$ 1 pont

Rendezéssel $(n-1)(k-1) = 4(n+k-2)$ adódik, azaz $nk-n-k+1 = 4n+4k-8$ alapján $nk-5n = 5k-9$.

A kapott összefüggésből $n = \frac{5k-9}{k-5}$, ahol $k > 5$. 1 pont

Mivel $n = \frac{5k-9}{k-5} = \frac{5k-25}{k-5} + \frac{16}{k-5} = 5 + \frac{16}{k-5}$, ezért $(n-5)(k-5) = 16$. 1 pont

A $16 = 1 \cdot 16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4 = 8 \cdot 2 = 16 \cdot 1$ felbontások alapján

n	6	7	9	13	21
k	21	13	9	7	6

adódik. 1 pont

A prímek körében így a megoldás:

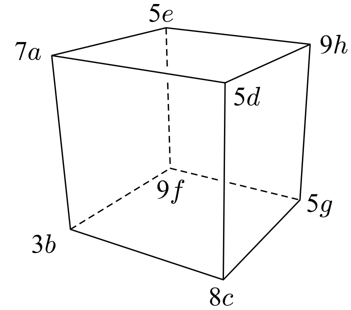
n	7	13
k	13	7

,

azaz az egyik egyenesen 7, a másik egyenesen pedig 13 megjelölt pontnak kell lennie. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Egy kocka minden csúcsát két természetes számmal jelöltük meg, amelyek közül egyet egy betűvel eltakartunk. Így az egyik szám látható, a másik nem. Bármely csúcsnál lévő látható szám a csúccsal élszomszédos három, betűvel takart szám átlaga. Milyen számokat rejtenek a betűk?



Megoldás. Jelöljük a csúcsokat az abban a csúcsban takart betűvel. Az A csúccsal szomszédos csúcsok az E, D és B. Ezekre felírva a feltételt:
A: $\dfrac{e+d+b}{3} = 7$, azaz $e+d+b = 21$.
Hasonlóan a többi csúcsra:
B: $a+f+c = 9$,
C: $b+d+g = 24$,
D: $a+h+c = 15$,
E: $a+f+h = 15$,
F: $e+b+g = 27$,
G: $h+f+c = 15$,
H: $e+d+g = 27$. 1 pont

Az E és D egyenletekből $f = c$.
A D és G egyenletekből $a = f$.
A H és F egyenletekből $b = d$. 1 pont

A B egyenletből és az előzőek miatt $a = f = c = 3$.
A G egyenletbe $f = c = 3$-at helyettesítve $h = 9$-et kapunk. 1 pont

Az A és C egyenletből $d = b$-t behelyettesítve kapjuk, hogy $e+2b = 21$, illetve $g+2b = 24$.
A két egyenletet egymásból kivonva $g = e+3$ adódik. 1 pont

Ezt behelyettesítve a H egyenletbe:

$$\begin{aligned} e+b+3+e &= 27, \\ 2e+b &= 24. \end{aligned}$$

A C egyenletbe $b = d$-t és $g = e+3$-at helyettesítve:

$$\begin{aligned} 2b+3+e &= 24, \\ 2e+b &= 2b+3+e, \\ e &= b+3. \end{aligned}$$

1 pont

Ezt behelyettesítve az A egyenletbe:

$$\begin{aligned} (b+3)+b+b &= 21, \\ b &= 6. \end{aligned}$$

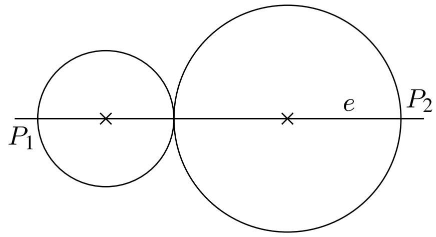
1 pont

Azaz $a = c = f = 3$, $b = d = 6$, $e = h = 9$, $g = 12$. 1 pont

Összesen: 7 pont

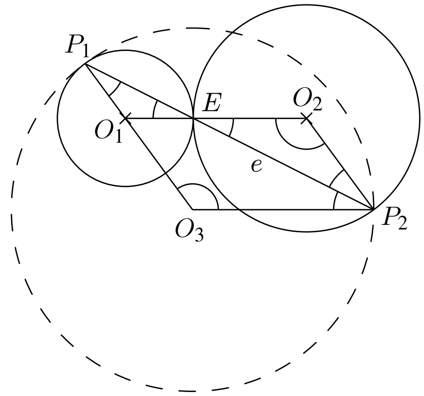
4. A k_1 és k_2 körök kívülről érintik egymást. Az érintési ponton átmenő egyenes k_1-et a P_1, k_2-t a P_2 pontban metszi másodszor. Megrajzoltuk a P_1-en és P_2-n áthaladó, k_1-et érintő kört. Bizonyítsuk be, hogy ennek a körnek a sugara a k_1 és k_2 körök sugarának összegével egyenlő!

Megoldás. Két esetet különböztetünk meg:



1. Ha az egyenes átmegy k_1 és k_2 középpontján, akkor a harmadik kör középpontja rajta van e-n. Ezért a P_1P_2 szakasz ennek a körnek az átmérője és hossza a két másik átmérő összege. 2 pont

2. Ha az e egyenes nem halad át k_1 és k_2 középpontján, akkor létrejönnek a P_1O_1E, P_2O_2E és a $P_1O_3P_2$ háromszögek. Jó ábra: 1 pont



Ezek a háromszögek mind egyenlő szárúak, ezért a bejelölt szögek egyenlőek. 1 pont

Az $O_1O_2P_2O_3$ négyszög paralelogramma, mert szemközti szögei egyenlőek. 1 pont

Ezért szemközti oldalai egyenlőek, azaz $O_3P_2 =$ $= O_1O_2$. 1 pont

De a két kör érintkezése miatt $O_1O_2 = r_1 + r_2$, így a harmadik kör sugara $O_3P_2 = r_1 + r_2$. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. A Fiatal Matematikusok Konferenciájára 99 diák kapott meghívást. A résztvevők magyar, angol, német, olasz, francia, görög és török nemzetiségűek voltak. A szervezők észrevették, hogy nincs 8 különböző korú, azonos nemzetiségű résztvevő. Bizonyítsuk be, hogy van két azonos korú, nemű és nemzetiségű résztvevő a konferencián!

(Az életkor egész szám.)

Megoldás. Háromszor alkalmazzuk a skatulya elvet egymás után.

Ha nincs 8 különböző korú, azonos nemzetiségű résztvevő, akkor legfeljebb 7-féle korú, azonos nemzetiségű diák érkezhetett. (Azaz lehetséges, hogy $7 \cdot 7 = 49$ különböző korcsoport van, de egy nemzetiségen belül csak legfeljebb 7 különböző korú diák lehet.) 1 pont

Ha mindegyik nemzetiségből csak 14 diák lenne, akkor a 7 nemzetiség diákjai összesen 98 embert tennének ki a 99 helyett: $14 \cdot 7 = 98 < 99$. Ezért biztosan van 15 azonos nemzetiségű résztvevő. 2 pont

Abban a nemzetiségben, ahol 15-en vannak, biztosan van 3, aki ugyanolyan korú, mert legfeljebb 7-féle korosztály van egy nemzetiségen belül, és ha minden korosztályban csak 2 ember lenne, akkor csak 14 embert tennének ki a 15 helyett: $2 \cdot 7 = 14 < 15$. 2 pont

A három ember közül biztosan van 2, amelyik ugyanolyan nemű. Azaz az állításunkat beláttuk. 2 pont

Összesen: 7 pont