

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2006/2007-es tanév

kezdők I–II. kategória II. forduló

kezdők III. kategória I. forduló

Feladatok

1. Hány olyan négyjegyű egész szám van a tízes számrendszerben, amelyben szerepel a 0 és az 1 számjegy is? (6 pont)

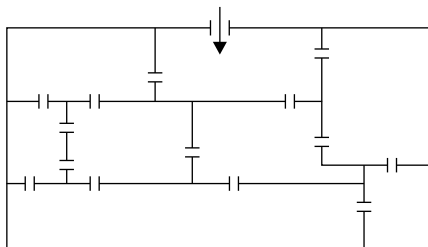
2. Melyek azok a nem negatív x , y , és z egész számok, melyekre teljesül, hogy:

$$(x + y + z)^2 + (x + y - z)^2 + (x - y + z)^2 = 40. \quad (6 \text{ pont})$$

3. Egy szabályos ötszög kerülete 10 egység. Jelölje AT az egyik szimmetriatengelyének az ötszögbe eső szakaszát, h az AT , R a köré írt és r a beleírt kör sugarának hosszát! Igazolja, hogy:

$$\frac{1}{h} = R - r. \quad (8 \text{ pont})$$

4. Egy királyi palota alaprajza látható az alábbi ábrán. Tíz évvel ezelőtt az ábrán feltüntetett ajtók egyikét befalazták, ezt a változtatást tehát az ábra nem tükrözi. Három éve a király minden reggel bemegy a palotába a nyíllal megjelölt bejáraton, majd úgy sétál a termek között, hogy minden ajtón pontosan egyszer menjen keresztül. Végül leül a trónteremben és fogadja látogatóit.



a) Melyik ajtót falazták be? b) Melyik terem a trónterem? (10 pont)

5. Az $ABCD$ konvex négyszöget AC átlójával felbontjuk két háromszögre. Bizonyítsa be, hogy ha az így keletkezett ABC és ADC háromszögek beírt körei érintik egymást, akkor az ABD és BCD háromszögek beírt körei is érintik egymást. (10 pont)