Matematika

MÁSODIK KÖTET

10

ÚJGENERÁCIÓS
TANKÖNYV

Matematika

MÁSODIK KÖTET

10.

Eszterházy Károly Egyetem
Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet

A tankönyv megfelel az 51/2012. (XII. 21.) EMMI-rendelet:
3. sz. melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 9–12. évfolyama számára 3.2.04 Matematika
6. sz. melléklet: Kerettanterv a szakközépiskolák 9–12. évfolyama számára 6.2.03 Matematika
megnevezésű kerettantervek előírásainak.

Tananyagfejlesztő: Barcza István, Basa István, Tamásné Kollár Magdolna

Alkotószerkesztő: Tamásné Kollár Magdolna

Vezetőszerkesztő: Tóthné Szalontay Anna

Tudományos szakmai lektor: Pálfalvi Józsefné

Pedagógiai lektor: Bánky Judit

Olvasószerkesztő: Füleki Lászlóné, Mikes Vivien

Fedél: Orosz Adél

Látvány- és tipográfiai terv: Gados László, Orosz Adél

Illusztráció: Létai Márton

Szakábra: Szalóki Dezső, Szalókiné Tóth Annamária

Fotók:
PIXABAY, FLICKR, WIKIPEDIA, 123RF, SK.

A tankönyv szerkesztői ezúton is köszönetet mondanak mindazoknak a tudós és tanár szerzőknek, akik az elmúlt évtizedek során olyan módszertani kultúrát teremtettek, amely a kísérleti tankönyvek készítőinek is ösztönzést és példát adott. Ugyancsak köszönetet mondunk azoknak az íróknak, költőknek, képzőművészeknek, akiknek alkotásai tankönyveinket gazdagítják.

ISBN 978-963-436-030-8

Eszterházy Károly Egyetem • 3300 Eger, Eszterházy tér 1.
Tel.: (+36-1) 460-1873 • Fax: (+36-1) 460-1822 • Vevőszolgálat: vevoszolgalat@ofi.hu

A kiadásért felel: dr. Liptai Kálmán rektor
Raktári szám: FI-503011002/1
Műszakiiroda-vezető: Horváth Zoltán Ákos • Műszaki szerkesztő: Orosz Adél • Grafikai szerkesztő: Kováts Borbála
Nyomdai előkészítés: Gados László • Terjedelem: 18,54 (A/5) ív, tömeg: 366,49 gramm

A könyvben felhasználásra került a Matematika 10. Közel a mindennapokhoz című mű,
Konsept-H Könyvkiadó, Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt., 2013. Szerzők: dr. Korányi Erzsébet és dr. Marosvári Péter.
Alkotószerkesztő: Környei László. Felelős szerkesztő: Bognár Edit. Lektor: Somfai Zsuzsa.

1. kiadás, 2018

Az újgenerációs tankönyvek az Új Széchenyi Terv Társadalmi Megújulás Operatív Program 3.1.2-B/13-2013-0001 számú, „A Nemzeti alaptantervhez illeszkedő tankönyv, taneszköz és Nemzeti Köznevelési Portál fejlesztése" című projektje keretében készült. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők:
Herczegné Kaszás Judit, Zarubay Attila

Engedélyszám:
TKV/10–14/2017 (2017. 03. 27–2022. 08. 31)

SZÉCHENYI 2020

Nyomta és kötötte az Alföldi Nyomda Zrt., Debrecen
Felelős vezető: György Géza vezérigazgató
A nyomdai megrendelés törzsszáma:

Magyarország Kormánya

Európai Unió
Európai Szociális Alap

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

ELŐSZÓ – A TANKÖNYV TÉMAKÖREI

Segítségképpen a kötet elején újból bemutatjuk, milyen típusú részekből épül fel a tankönyv.

BEVEZETŐ: Sok esetben egyszerű és gyakorlati problémák vezetnek érdekes matematikai kérdésekhez. Ilyenekre találhatsz példát a lecke elején a BEVEZETŐ-ben.

KIDOLGOZOTT FELADAT: Ebben a részben részletes magyarázatokkal mutatjuk be egy konkrét feladat megoldását.

ELMÉLET: Itt rendszerezzük a matematikai tartalmakat. Megfogalmazzuk a pontos matematikai fogalmakat (definíciók) és állításokat (tételek) is.

FELADATOK: Igyekeztünk változatos feladatokat összeállítani egy-egy órára, a könnyebbekkel kezdve. A feladatokat nehézségük szerint szinteztük. A Ⓚ jel arra utal, hogy a feladat megoldásához nemcsak matematikai tudás szükséges, hanem többféle szempontú elemzés és probléma megoldás. Ezek az úgynevezett kompetencia feladatok.

CSOPORTMUNKA: Néhány esetben ezt a munkaformát javasoljuk a feladatok megoldására.

HÁZI FELADAT: 4-5 feladat az otthoni munkához.

RÁADÁS: Itt matematikai érdekességeket, ötletes és izgalmas feladatokat találsz.

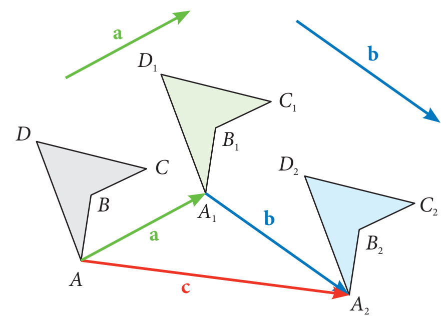
EMELT SZINT: Ezek a részek túlmutatnak a középszintű érettségi követelményeken. Az emelt szintű érettségi követelményeihez tartozó fogalmak, feladattípusok, illetve szép, precíz bizonyítások találhatók ezekben a részekben.

Ha tartós tankönyved van, amit vissza kell adnod az iskolának a tanév végén, akkor ne írj a tankönyvbe, dolgozz a füzetedbe! (Táblázatok esetén segítségedre lehet egy öntapadós jegyzettömb: egy öntapadós lapot tegyél a táblázat mellé, s arra írhatod az eredményeket.)

46 KÉT VEKTOR HELYETT EGY

BEVEZETŐ

Toljuk el az $ABCD$ négyszöget először az **a** vektorral, az így kapott négyszöget pedig a **b** vektorral. A második eltolás után az $A_2B_2C_2D_2$ négyszöget kapjuk. Adjuk meg annak az egyetlen eltolásnak a vektorát, amelyik az $ABCD$ négyszöget az $A_2B_2C_2D_2$ négyszögbe viszi át!

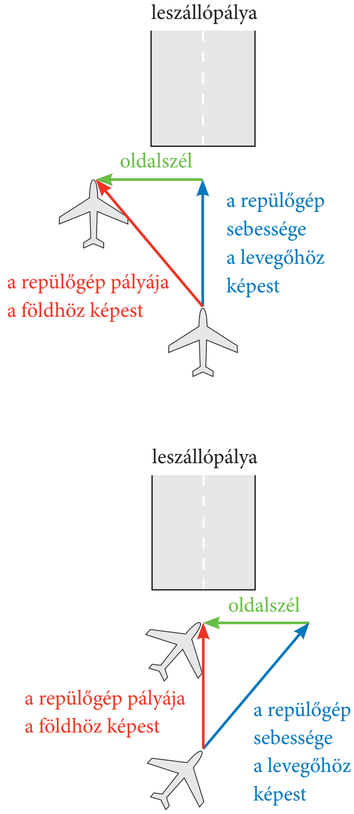


Megoldás

Az ábráról könnyen leolvasható, hogy az $ABCD$ négyszög valóban egyetlen eltolással is átvihető az $A_2B_2C_2D_2$ négyszögbe (mert megfelelő oldalaik párhuzamosak és egyenlő hosszúak), az eltolás vektora pedig a **c**.

Az eltolás tulajdonságai vizsgálhatók a *GeoGebra* programmal is.

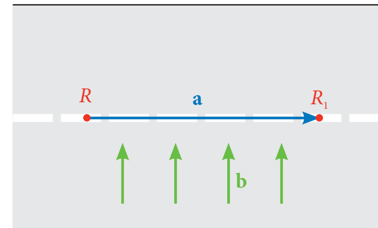
KIDOLGOZOTT FELADAT

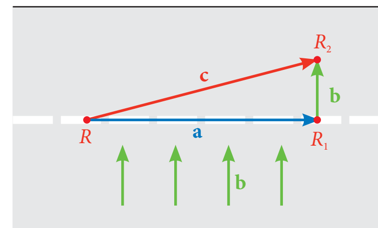


Idézet egy internetes cikkből: „A repülőterek tervezésénél a fő szempont az uralkodó szélirány, mivel az akár 4 km hosszú pályákat úgy kell megépíteni, hogy azok lehetőleg az ott leggyakrabban jellemző szél irányában legyenek használhatóak. […]

Ha a szél nem pontosan pályairányból fúj, vagyis „oldalas", akkor pályairányra merőleges komponense is van. Ilyenkor a repülőgép oldalirányban lesodródna a pálya tengelyvonalából (bal oldali felső ábra), amit a pilótának meg kell előznie. … A nagygépes repülésre jellemző módszer a szélre való „rátartás". Ilyenkor a repülőgép tengelyvonala nem párhuzamos a pályával, vagyis a földről szemlélve olyan, mintha oldalazva, csúszva repülne. Ilyenkor a gép orra kissé a szél felé mutat (bal oldali alsó ábra és az alábbi fénykép)."

Az ábrán az **a** vektor azt mutatja meg, hogy a vízszintesen repülő, leszálláshoz készülődő repülőgép egy másodperc alatt hogyan mozdul el a leszállópályához képest szélcsend esetén. (A szaggatott fehér vonal a leszállópálya középvonala.)
Egy leszállásnál jobbról erős keresztirányú szél fúj, amely egy másodperc alatt a **b** vektorral mozdítja el a repülőgépet.
Ha a repülőgép pilótája nem változtatna a szélcsendben megszokott leszállási folyamaton, akkor az eredetileg az R pontban lévő repülő hová kerülne egy másodperc alatt az R_1 helyett?



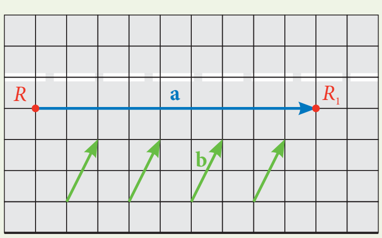


Megoldás
A repülőgép elmozdulását a gép motorja és az oldalszél együttesen alakítja. A gép egy másodperc alatti elmozdulását a **c** vektorral szemléltethetjük. A repülőgép tehát az oldalszél hatására az R_1 helyett az R_2 helyre jutna a pilóta közbeavatkozása nélkül. (A gép rövid idő alatt elsodródna a leszállópályától.)

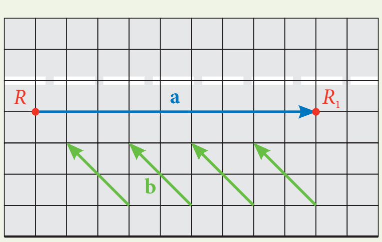
FELADAT

1 Határozd meg a füzetedben, hogy különböző szélirányok és szélerősségek esetén hová kerül az eredetileg az R helyen lévő repülőgép a szélcsendben „szokásos” R_1 helyett! (A megadott vektorok jelentése ugyanaz, mint a példában.)

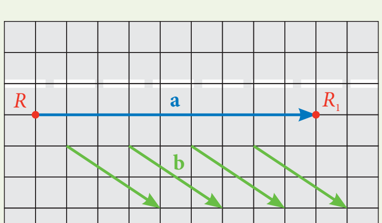
a)



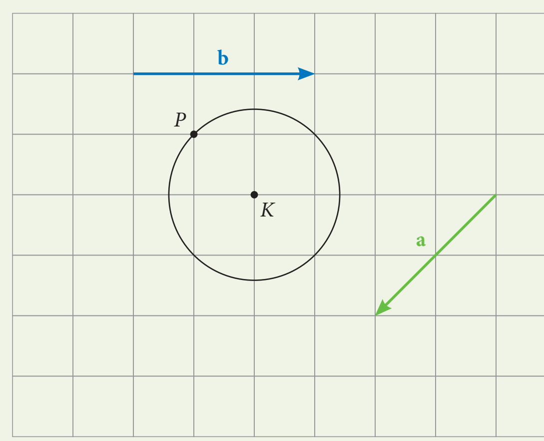
b)



c)



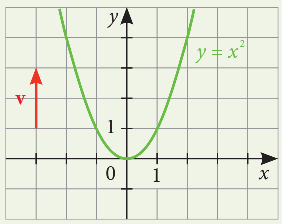
2 Told el a megadott kört először az **a** vektorral, majd az eltolás után kapott kört told el a **b** vektorral! A füzetedben dolgozz!



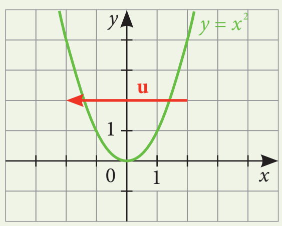
a) Jelöld meg a K és a P pont eltolásokkal kapott két-két képét!
b) Add meg azt az egyetlen eltolást, amely az eredeti kört a második eltolással kapott körbe viszi! Ennek a vektorát jelöld **c**-vel!
c) Más vektort kapunk-e, ha először a **b** vektorú, majd az **a** vektorú eltolást hajtjuk végre?
d) A négyzetrács legkisebb négyzetének oldala 1 egység hosszúságú. Mekkora az **a**, a **b** és a **c** vektor hossza?

3 Az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonját told el a megadott vektorral, rajzold meg az eltolással kapott grafikont a füzetedben! Melyik függvény grafikonját kaptad meg?

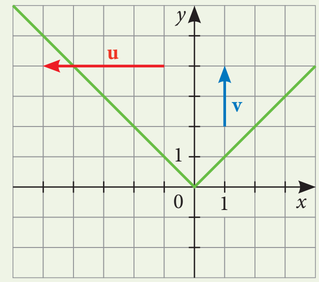
a)



b)



4 Az $x \mapsto |x|$ függvény grafikonját told el először az **u** vektorral, majd az eltolással kapott grafikont told el a **v** vektorral! A füzetedben dolgozz!



a) Add meg az eltolással kapott grafikonokhoz tartozó függvényeket!

b) Add meg annak az egyetlen eltolásnak a vektorát, amely az eredeti függvény grafikonját a második eltolás után kapott grafikonba viszi át!

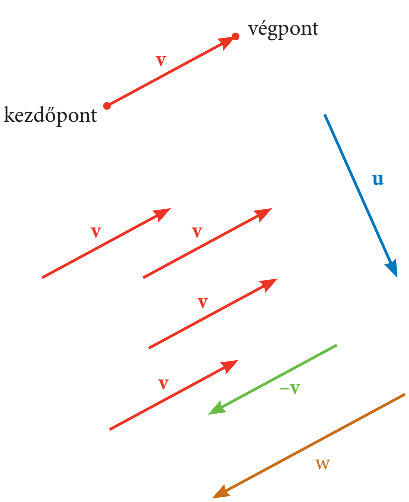
c) Cseréld fel a két eltolás sorrendjét (először a **v** vektorral, majd az eltolással kapott grafikont az **u** vektorral told el), és ismét add meg a kapott grafikonokhoz tartozó függvényeket!

d) Rajzold meg annak az eltolásnak a vektorát, amelyik az $x \mapsto |x|$ függvény grafikonját az $x \mapsto |x+2| - 3$ függvény grafikonjába viszi át!

ELMÉLET

1. A **vektort** *alapfogalomnak* tekintjük, nem adunk rá meghatározást, legfeljebb azt mondhatjuk rá (körülírásként), hogy ez egy *irányított szakasz.*

A vektort az *állása*, az *iránya* és az *abszolút értéke* (hossza) jellemzi. A vektor *állása* azt jelenti, hogy melyik egyenesekkel párhuzamos. Egy álláson belül kétféle *irány* lehetséges, az irányt mutatja a nyíl hegye. A vektor kezdőpontjának és végpontjának a távolságát a vektor *hosszúságának* vagy a vektor *abszolút értékének* nevezzük.



2. Ha két vektor állása ugyanaz, akkor ezeket *egyállású* (*párhuzamos*) vektoroknak nevezzük. Ha két vektor állása merőleges, akkor a két vektort is *merőlegesnek* mondjuk. Az **a** vektor hosszának jele: $|\mathbf{a}|$.

3. Két vektort *egyenlőnek* mondunk, ha ugyanaz az állásuk is, irányuk is, abszolút értékük is. Egyenlő vektorok ugyanazt az eltolást hozzák létre.

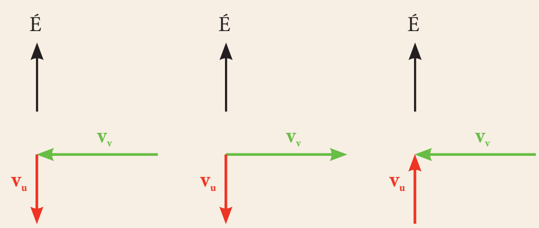
(Az ábrán a piros vektorok mind egyenlők; az **u** és a **v** különböző állású; a **v** és **w** azonos állású.)

4. Két vektor egymás *ellentettje*, ha ugyanaz az állásuk és az abszolút értékük, az irányuk pedig ellentétes. Egy **v**-vel jelölt vektor ellentettjének a jele: **−v**. A **−v** ellentettje a **v.**

HÁZI FELADAT

1 Egy lassan haladó vonat nyugatról kelet felé mozog, másodpercenként 2 métert tesz meg. Az egyik kocsiban egy utas „keresztbe” átsétál a vonat egyik oldaláról a másik oldalára, a pontosan szemben lévő helyre. Egy másodperc alatt az utas 1,5 métert tesz meg a kocsiban.

a) Válaszd ki a három ábra közül azt, amelyik a leírt történéshez tartozhat!



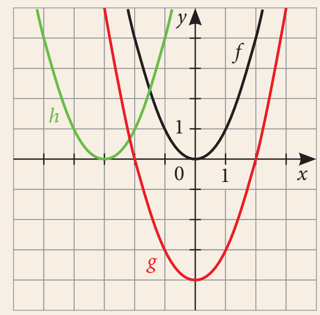
b) Mekkora utat tesz meg egy másodperc alatt az utas a vasúti sínekhez képest?

2 Rajzold meg a füzetedben annak az egyetlen eltolásnak a vektorát, amely

a) a *g* jelű grafikont az *f* jelűbe,

b) az *f* jelű grafikont a *h* jelűbe,

c) a *g* jelű grafikont a *h* jelűbe viszi át!

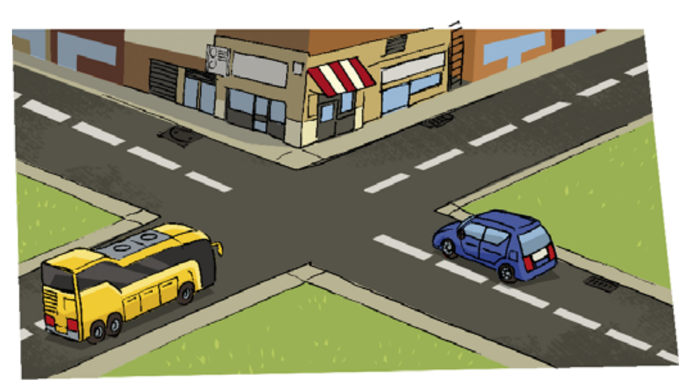


3 Hány olyan különböző eltolás adható meg, amely az *f*, *g*, *h* jelű grafikonok közül valamelyik kettőt egymásba viszi át? Add meg mindegyiket egy-egy vektorral! A füzetedben dolgozz!

RÁADÁS

1 Adj meg olyan eltolást, amely a koordináta-rendszerben az $x \mapsto |x+3| - 4$ függvény grafikonját az $x \mapsto |x+1| + 5$ függvény grafikonjába viszi át!

2 Egy merőleges útkereszteződés felé közeledik két jármű. Az autóbusz délről észak felé halad, sebessége 55 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. A személyautó keletről nyugat felé halad, és sebessége 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.



a) Készíts ábrát!

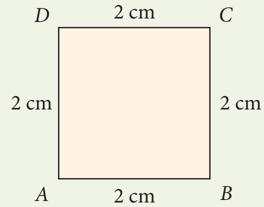
b) A buszsofőrhöz viszonyítva milyen irányú, és mekkora sebességgel „mozog” a kereszteződés?

c) A buszsofőrhöz viszonyítva milyen irányú, és mekkora sebességgel halad az autó?

47 VEKTOROK ÖSSZEADÁSA

FELADAT

1. Hasonlítsd össze azokat a vektorokat, amelyek a 2 cm oldalú *ABCD* négyzet valamelyik csúcsából a négyzet egy másik csúcsába vezetnek!

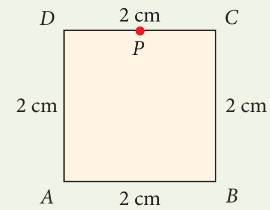


a) Hány ilyen vektor van?

b) Közülük hány vektor abszolút értéke egyenlő az $\overrightarrow{AB}$ abszolút értékével? Melyik egyállású az $\overrightarrow{AB}$ vektorral?

c) Melyik vektor abszolút értéke egyenlő az $\overrightarrow{AC}$ abszolút értékével? Közülük melyik egyállású az $\overrightarrow{AC}$ vektorral, és melyik merőleges rá?

2. Jelölje *P* a *DC* oldal felezőpontját!



a) Told el *P*-t az $\overrightarrow{AB}$ vektorral, majd a *P* képét az $\overrightarrow{AD}$ vektorral! A két eltolás után kapott pontot jelöljük *Q*-val! Mekkora a *PQ* távolság?

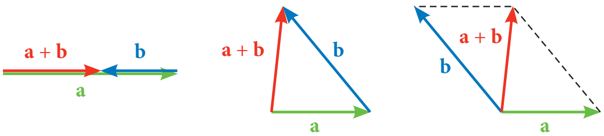
b) Told el *P*-t az $\overrightarrow{AB}$ vektorral, majd a *P* képét a $\overrightarrow{CD}$ vektorral! A két eltolás után kapott pontot jelöljük *R*-rel! Mekkora a *PR* távolság?

ELMÉLET

Két vektor összeadása

Ha egy vektor ugyanazt az eltolást hozza létre, mint az **a** vektorral és **b** vektorral való eltolás egymásutánja, akkor ezt a vektort az **a** és a **b** vektor *összegének* nevezzük. *Jele*: **a** + **b**.

Két vektor összegvektorát úgy szerkesztjük meg, hogy egymáshoz csatlakozva mérjük fel a vektorokat (a második vektor kezdőpontja legyen az első vektor végpontjában), és megrajzoljuk az első vektor kezdőpontjából a második vektor végpontjába mutató vektort. Ha a két „összeadandó” nem egyállású, akkor a *paralelogramma-szabállyal* is megkaphatjuk az összegvektort. Ezt mutatja a harmadik ábra.



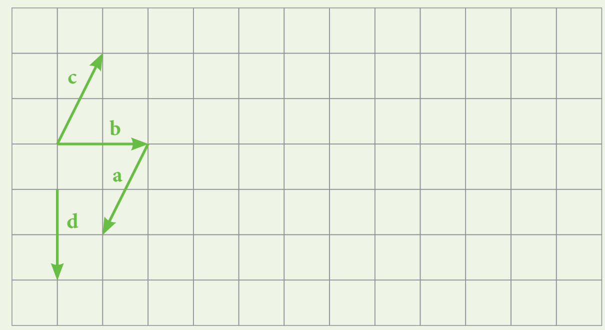
Kiegészítések

– Ha két ellentett vektort adunk össze, akkor az összegvektor kezdőpontja és végpontja egybeesik, vagyis 0 az összegvektor hosszúsága. A nulla hosszúságú vektort **nullvektornak** nevezzük. A nullvektor jele írásban $\underline{0}$, nyomtatásban **0**.

– A **két vektor összeadásának** nevezett műveletnek nincs semmi köze a **két szám összeadásakor** megismert művelethez. Két vektor összeadásakor „semmi sem adódik össze” a szó „hagyományos” értelmében. Sem a vektorok hosssza (kivéve az egyirányú vektorok esetét), sem pedig az iránya (ezt egyébként sem tudnánk értelmezni…). A most definiált művelet nevét (és a jelét is) a matematikusok „kényelmességének” köszönhetjük.
A fizikában két vektor összege helyett a **két vektor eredője** elnevezés (is) használatos, de a művelet jele itt is a valós számoknál használt + szimbólum.

FELADAT

3 Az ábrán megadott vektorok mindegyikének rácspont a kezdőpontja és a végpontja is (*rácsvektorok*). A rács legkisebb négyzetének oldalhossza 1 egység.



a) Add meg mindegyik vektor hosszát!

b) Van-e a vektorok között két azonos állású? És két azonos irányú?

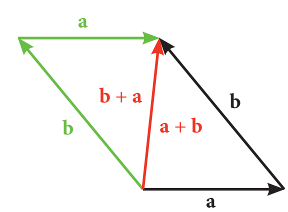
c) Szerkeszd meg a rács segítségével a következő vektorokat a füzetedben:
$\mathbf{b}+\mathbf{a}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{c}+\mathbf{b}$,
$\mathbf{a}+\mathbf{c}$, $\mathbf{d}+\mathbf{a}$, $\mathbf{b}+\mathbf{d}$!

d) Számítsd ki a megszerkesztett összegvektorok hosszát!

ELMÉLET

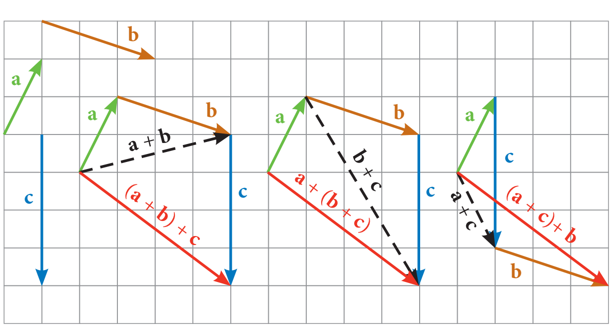
A vektorösszeadás kommutatív művelet

A paralelogramma-ábra nem egyállású vektorok esetére mutatja, hogy a **vektorösszeadás két tagja felcserélhető**: bármely **a** és **b** esetében $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.
Ez a kapcsolat egyállású vektoroknál is fennáll.



KIDOLGOZOTT FELADAT

Adott az ábrán három rácsvektor: **a**, **b** és **c**. Kiválasztunk közülük kettőt és összeadjuk őket, majd a kapott összegvektorhoz hozzáadjuk a harmadik vektort. Hány különböző vektort kaphatunk a második összeadás után?

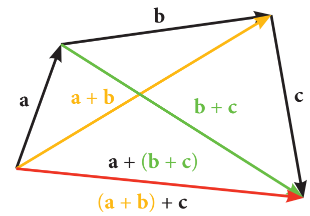


Megoldás
Három vektor közül háromféleképpen lehet kiválasztani kettőt. A két kiválasztott vektor összege nem függ a sorrendjüktől, tehát az első összeadás háromféle lehet: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, $(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ vagy $(\mathbf{a}+\mathbf{c})$. A harmadik vektornak és az előbb kapott összegvektornak az összege független a sorrendtől, tehát csak az $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$, az $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ és az $(\mathbf{a}+\mathbf{c})+\mathbf{b}$ eseteket kell megvizsgálni.
Mindhárom esetet megrajzolva azt a meglepő eredményt kapjuk, hogy a csoportosításoktól (és az összeadandók sorrendjétől is) függetlenül csak egyféle vektor (az ábrán a piros színnel jelölt vektor) lehet a három vektor összege.

ELMÉLET

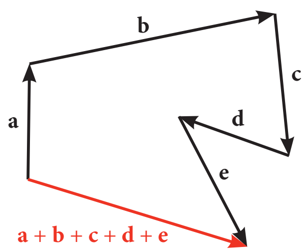
A vektorösszeadás asszociatív művelet

Két vektor összegét definiáltuk, **bármely két vektor összege egy vektor** (ami akár a $\mathbf{0}$ is lehet). Ha három vektort kell összegezni, akkor először két vektort adunk össze, majd az így kapott összegvektorhoz hozzáadjuk a harmadik vektort.



Az ábrán egymáshoz csatlakozva mértük fel sorban az $\mathbf{a}$-t, a $\mathbf{b}$-t és a $\mathbf{c}$-t. Így jól látszik: mindegy, melyik két vektort adjuk össze az első lépésben, vagyis bármely $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ esetében $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

Felesleges tehát zárójeleket írni: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

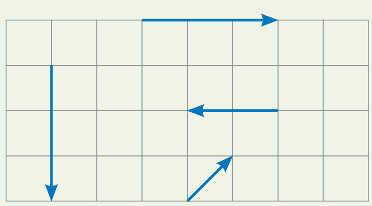


Az is igaz, hogy kettőnél több adott vektor összegét megkapjuk, ha (tetszőleges sorrendben) egymáshoz csatlakozva mérjük fel a vektorokat, és megrajzoljuk az első vektor kezdőpontjából az utolsó vektor végpontjába mutató vektort.

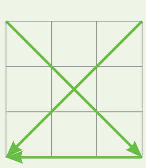
FELADAT

4 Rajzold meg az ábra vektorainak összegét a füzetedben!

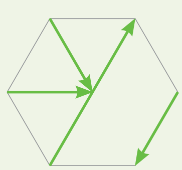
a)



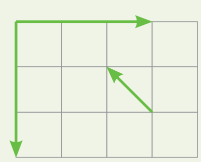
b)



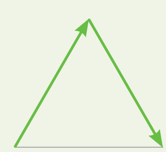
c)



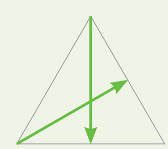
a)



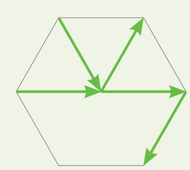
b)



c)



d)



5 Az ábrán megadott vektorokhoz rajzolj hozzá még egy vektort úgy, hogy az ábra vektorainak összege $\mathbf{0}$ legyen! A füzetedben dolgozz!

6 a) Az $ABCD$ téglalapban $AB = 4$ cm, $AD = 3$ cm. Számítsd ki a $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ abszolút értékét!

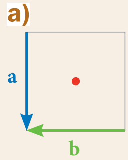
b) Számítsd ki a $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}$ abszolút értékét!

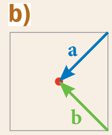
c) Az $ABCD$ rombusz oldalhossza 4 cm, $ABC\sphericalangle = 60°$.

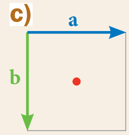
Mekkora a $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ hossza? És az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ hossza?

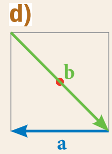
HÁZI FELADAT

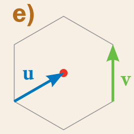
1 Rajzold meg a két vektor összegét a füzetedben! (A négyzetnek és a szabályos hatszögnek adott a középpontja is.)

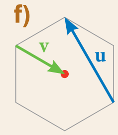
a)


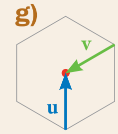
b)


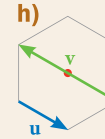
c)


d)


e)


f)


g)


h)


2 $|\mathbf{a}| = 6$ cm és $|\mathbf{b}| = 2{,}5$ cm, a vektorok állásáról nem tudunk semmit.

a) Legfeljebb mekkora lehet az $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$? Rajzolj egy ilyen esetet!

b) Legalább mekkora az $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$? Rajzolj egy ilyen esetet!

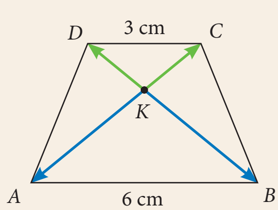
c) Számítsd ki, mekkora az $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$, ha $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$!

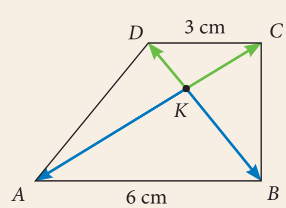
3 Adj meg

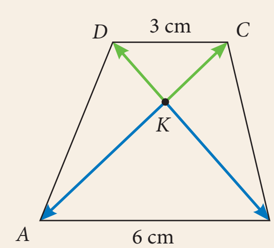
a) 3 **b)** 4 **c)** 5

olyan vektort, amelyeknek **0** az összege!

4 Szerkeszd meg a *K* pontból az *ABCD* trapéz csúcsaiba vezető négy vektor összegét! (*K* a trapéz átlóinak metszéspontja.) Hol van ennek a vektornak a végpontja, ha a kezdőpontját *K*-ba helyezed? A füzetedben dolgozz!

a)


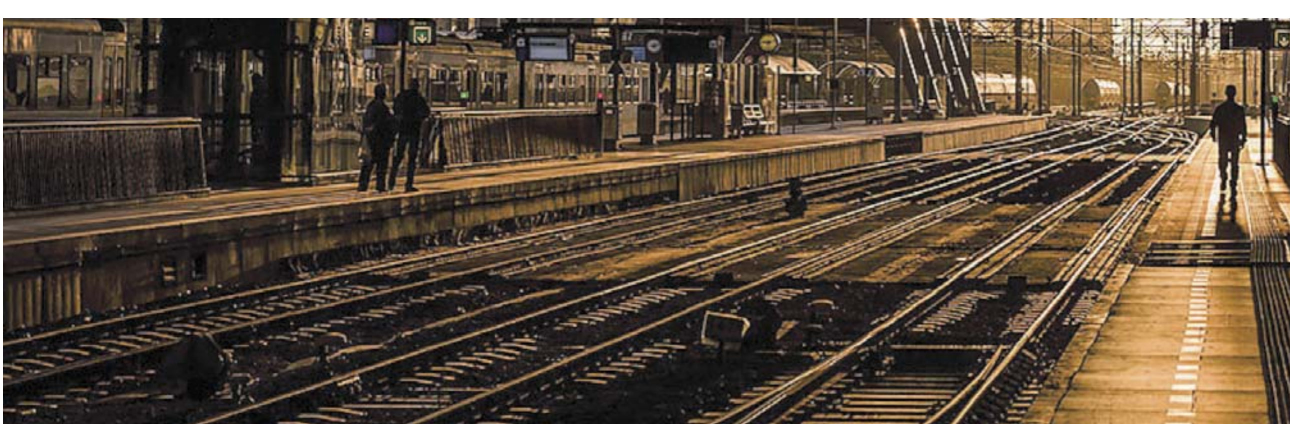
b)


c)


RÁADÁS

Rajzold meg egy *ABC* háromszög körülírt körét! A kör középpontját jelöld *K*-val! Milyen állású a $\overrightarrow{KA}$ és a $\overrightarrow{KB}$ összege, ha az $ACB\sphericalangle$

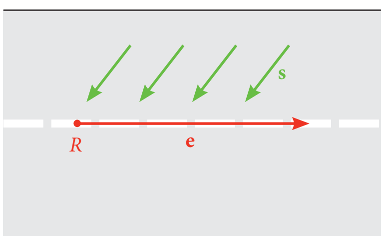
a) hegyesszög; **b)** derékszög; **c)** tompaszög?



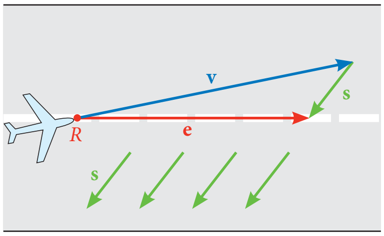
48 KÉT VEKTOR KÜLÖNBSÉGE

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Hogyan válassza meg a pilóta repülőgépének a levegőhöz viszonyított sebességét, ha a biztonságos leszálláshoz az előírt sebességgel kell haladnia a földhöz képest, de erős oldalszél fúj? A repülőgép az *R* pontban van, a leszálláshoz a földhöz képest **e** előírt sebességvektorral kellene repülnie, az oldalszél sebességét az **s** adja meg.



Megoldás
A 46. lecke kidolgozott feladatában láttuk, hogy a földhöz viszonyított sebességvektort megkapjuk, ha a repülőgép levegőhöz viszonyított **v** sebességvektorához hozzáadjuk a szél sebességvektorát. Tehát $\mathbf{e} = \mathbf{v} + \mathbf{s}$. Ennek alapján könnyen szerkeszthető a **v**, hiszen ha az *R* pontból indítjuk, akkor az utána fűzött **s** végpontja éppen az **e** végpontja lesz.



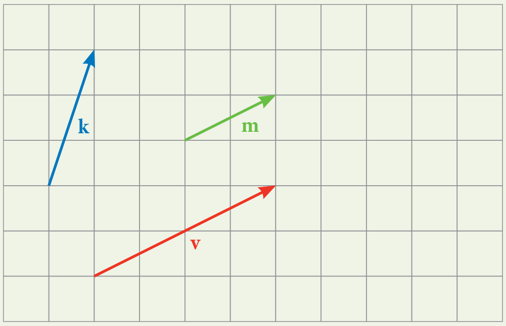
A repülőgépnek – az ábra tanúsága szerint – a szélcsendben szokásosnál nagyobb sebességgel kell a levegőhöz képest haladnia, és „rá is kell fordulnia” a szélirányra. Emiatt a repülőgép hossztengelye nem lesz párhuzamos a leszállópálya tengelyével.

Megjegyzés
A **v** vektort az **e** és az **s** *különbségvektorának* nevezzük, az **s** vektort pedig az **e** és a **v** *különbségvektorának*.
Jelekkel: $\mathbf{v} = \mathbf{e} - \mathbf{s}$ és $\mathbf{s} = \mathbf{e} - \mathbf{v}$.

FELADAT

1. Melyik vektort adjuk hozzá a **v**-hez, hogy
a) a **k**-t, **b)** az **m**-et, **c)** a **0**-t
kapjuk? Rajzold meg a vektorokat a füzetedben!

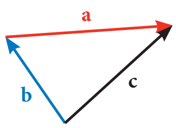
2. Melyik vektort adjuk hozzá a **k**-hoz, hogy
a) a **v**-t, **b)** az **m**-et, **c)** a **0**-t
kapjuk? Rajzold meg a vektorokat a füzetedben!



ELMÉLET

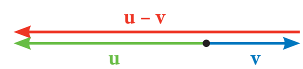
Két vektor kivonása

Ha $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, akkor az $\mathbf{a}$ vektort a $\mathbf{c}$ és a $\mathbf{b}$ *különbségvektorának* (röviden: *különbségének*) mondjuk. *Jele:* $\mathbf{c} - \mathbf{b}$. Azt a **műveletet** pedig, amely a **c**-ből és a **b**-ből előállítja a különbségüket, **kivonásnak** nevezzük.



Az ábra szerint $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, és így a különbség definíciója szerint $\mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$.
Hogyan szerkeszthető tehát a $\mathbf{c} - \mathbf{b}$? A **b**-t és **c**-t közös kezdőpontból mérjük fel; a kivonandó vektor (**b**) végpontjából a kisebbítendő vektor (**c**) végpontjába mutató vektor adja a $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ különbségvektort.

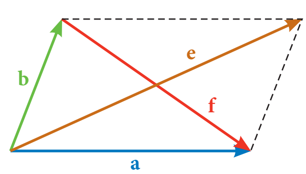
Ez a megfigyelés egyállású vektorok esetén is érvényes.



Megjegyzés
Vegyük észre: $\mathbf{b} + (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mathbf{c}$ és $\mathbf{c} - \mathbf{b} = \mathbf{c} + (-\mathbf{b})$!

KIDOLGOZOTT FELADAT

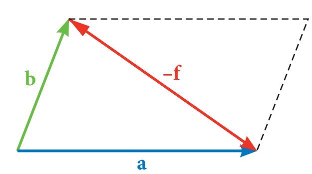
2. Írjuk fel a paralelogramma átlóvektorait a paralelogramma két, közös pontból induló oldalvektora segítségével!



Azt már korábban láttuk, hogy $\mathbf{e} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, a két vektor különbségénél mondottak szerint pedig $\mathbf{f} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Ha két nem egyállású vektort közös kezdőpontból mérünk fel, akkor a paralelogrammává kiegészített ábrán egyszerre szemlélhetjük a két vektor összegét és különbségét is.

3. Milyen kapcsolat van az $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ és a $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ között?



Ha az előző feladatban megadott **f** átlóvektor ellentettjét tekintjük, akkor láthatjuk, hogy ez éppen a $\mathbf{b} - \mathbf{a}$.
Ezek szerint az $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ és a $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ **egymás ellentettje**:
$-(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ és $-(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

FELADAT

3 **a)** Az $ABCD$ téglalapban $AB = 6$ cm, $AD = 2{,}5$ cm. Számítsd ki a $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ és a $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$ abszolút értékét!

b) Az $ABCD$ rombuszban $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = 8$ cm, $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}| = 6$ cm.
Mekkora az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ hossza?

4 Mutasd meg konkrét példákon, hogy igazak az alábbi állítások!

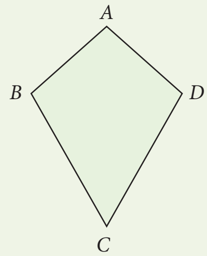
a) $\mathbf{a} - \mathbf{b} = -\mathbf{b} + \mathbf{a}$

b) $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b}$

c) $\mathbf{a} - (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$

5 Adott a konvex $ABCD$ deltoid, amelynek AC a szimmetriaátlója.

a) Rajzold meg az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ oldalvektorokat!



b) Melyik igaz, melyik hamis a következő kijelentések közül?

I. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$;

II. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$;

III. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$;

IV. $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$;

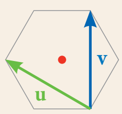
V. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ merőleges $(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC})$-re;

VI. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}$.

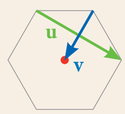
HÁZI FELADAT

1 Rajzold meg az $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ vektort! (A hatszög szabályos, a középpontja is adott.)

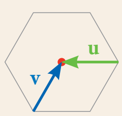
a)



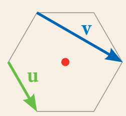
c)



b)



d)



2 Melyik vektorral egyenlő?

a) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + (\mathbf{b} - \mathbf{a})$

b) $\mathbf{c} + \mathbf{d} - \mathbf{a} + (-\mathbf{c}) - \mathbf{d}$

c) $\mathbf{a} + \mathbf{b} - (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + (-\mathbf{a})$

3 Milyen kapcsolat van a nem egyállású $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v}$ között, ha

a) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$;

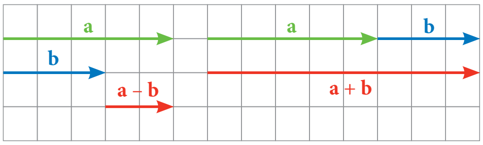
b) az $(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ vektor merőleges az $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ vektorra?

RÁADÁS

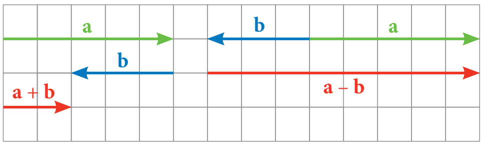
I. Milyen hosszú lehet két vektor összege, illetve különbsége?

Az egyszerűbb formák érdekében használjuk a vektor abszolút értékére a következő jelölést: $|\mathbf{v}| = v$.
A v tehát egy nemnegatív valós számot jelöl, a $\mathbf{v}$ hosszát.

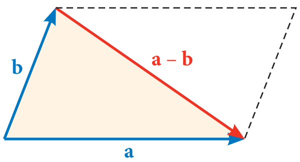
1. Ha **a** és **b** egyállású és egyirányú, akkor
$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = a + b$,
$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |a - b|$.



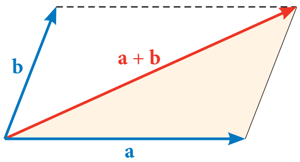
2. Ha **a** és **b** egyállású és ellentétes irányú, akkor
$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |a - b|$,
$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = a + b$.



3. Ha **a** és **b** nem egyállású, akkor gondoljunk a paralelogramma-szabályra!



Használjuk fel azt az ismeretet, hogy a háromszög oldalhossza kisebb a másik két oldal összegénél, és nagyobb a másik két oldal különbségénél. Ennek megfelelően
$|a - b| < |\mathbf{a} + \mathbf{b}| < a + b$ és $|a - b| < |\mathbf{a} - \mathbf{b}| < a + b$.



1–3. A három esetet együtt így írhatjuk le: $|a - b| \le |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \le a + b$ és $|a - b| \le |\mathbf{a} - \mathbf{b}| \le a + b$.

II. Változások

„Nincs, ami nem változnék, minden vándorol egyre,
Változtat s felforgat a természet keze mindent.”
(*Lucretius* római költő, Kr. e. I. sz.)

Az idő múlása sokszor együtt jár a változással. A változást a hétköznapokban kifejezhetjük szemléletesen („Óh, mennyit nőtt ez a gyerek tavaly óta!”) és pontosabban („Híztam két kilót.”; „Ötezer forinttal többet kaptam, mint a múlt hónapban.”). Minden esetben ugyanarról van szó. Egy korábbi állapotot hasonlítunk össze valamilyen szempontból egy későbbi állapottal. Például a tavalyi magasságunkat az ideivel, a múlt heti testtömegünket a jelenlegivel, a múlt havi fizetésünket az e havi fizetésünkkel.

Hogyan fejezzük ki a változást?

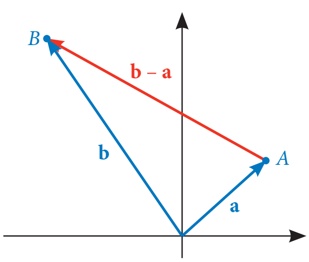
Minden esetben a **kivonás művelete segítségével**: az idei testmagasságunkból kivonjuk a tavalyi testmagasságunkat, a jelenlegi testtömegünkből a múltkori testtömegünket, az e havi fizetésünkből a múlt havi fizetésünket. A kivonás eredményével, **a különbséggel fejezzük ki a változást**.

Ez nem csak az egyetlen számmal kifejezhető mennyiségek (skalármennyiségek) esetében van így, a fizika minden olyan esetben ezt használja a mennyiségek megváltozásának kifejezésére, amikor a kivonás művelete értelmezve van. Minden esetben ugyanaz a „séma”: **„változás” = „végállapot” – „kezdőállapot”**.

Nézzünk erre két olyan példát, amelyben a fizikai mennyiséget vektorral lehet leírni!

1. példa

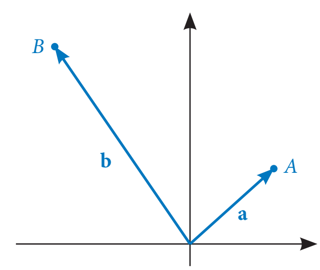
Egy mozgó test az *A* pontból a *B* pontba került. Hogyan változott meg a helyzete?



Kezdetben az **a** *helyvektor* adta meg a test helyzetét, a végállapotban pedig a **b** *helyvektor*. (A koordináta-rendszerben elhelyezkedő vektorok közül azokat nevezzük *helyvektoroknak*, amelyeknek az origó a kezdőpontja.) Tehát hogyan változott meg a test helyzete?

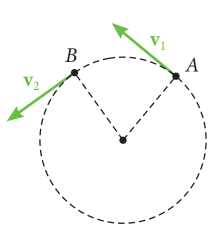
„változás” − „végállapot” − „kezdőállapot”

A test helyzetének megváltozását az $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ különbségvektor (az elmozdulásvektor) adja meg!



2. példa

Egyenletes körmozgást végző test sebességvektorának a hossza nem változik, csak a vektor iránya. Hogyan változott meg a test sebességvektora, amíg a körpálya *A* pontjából a *B*-be jutott?

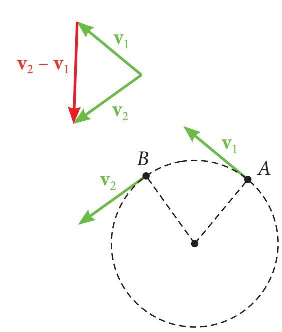


A válasz most is egyszerű:

„változás” = „végállapot” − „kezdőállapot”.

A sebességváltozás: $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, azaz a két sebességvektor különbségét kell megadnunk. Ezt a különbséget a lapon bárhol megszerkeszthetjük, hiszen a sebességváltozás vektorának megadásához csupán azt kell tudnunk, hogy ez a vektor milyen irányú és mekkora nagyságú.

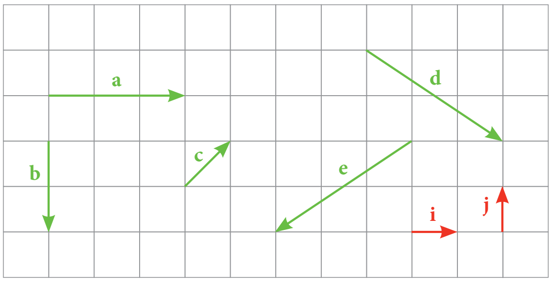
Az elmondottak egyértelművé teszik, hogy **az egyenletes körmozgást** végző test sebessége állandóan változik, ezért ez **gyorsuló mozgás** (a sebességvektor nagysága mindvégig ugyanakkora marad, de iránya folyamatosan változik).



49 VEKTOR SZÁMSZOROSA

BEVEZETŐ

Hogyan fejezhetjük ki az **i** és a **j** segítségével (a vektorösszeadás műveletét alkalmazva) az ábrán látható többi vektort?



Megoldás

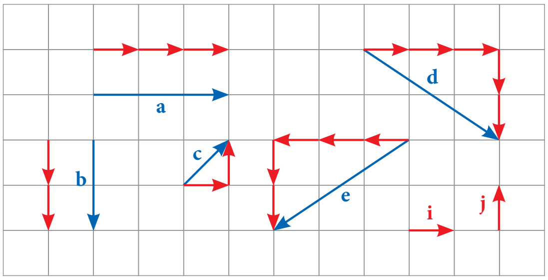
$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{i} + \mathbf{i}$,

$\mathbf{b} = (-\mathbf{j}) + (-\mathbf{j})$,

$\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$,

$\mathbf{d} = \mathbf{i} + \mathbf{i} + \mathbf{i} + (-\mathbf{j}) + (-\mathbf{j})$,

$\mathbf{e} = (-\mathbf{i}) + (-\mathbf{i}) + (-\mathbf{i}) + (-\mathbf{j}) + (-\mathbf{j})$.

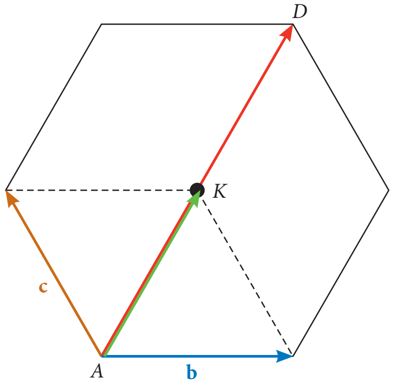


Kiegészítések

- Az **a** vektor egyállású és egyirányú az **i** vektorral, és 3-szor olyan hosszú, ezért azt is mondhatjuk, hogy az **a** az **i**-nek a *3-szorosa*. Jelöléssel: $\mathbf{a} = 3\mathbf{i}$.
- A **b** vektor egyállású és ellentétes irányú a **j** vektorral, a hossza pedig kétszerese a **j** hosszának; ezért azt is mondhatjuk, hogy a **b** a **j**-nek a (-2)-szerese: $\mathbf{b} = -2\mathbf{j}$.
- A $\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, ezért a fenti jelölések alkalmazásával: $\mathbf{d} = 3\mathbf{i} + (-2\mathbf{j})$.
- Az **e** felírható így: $\mathbf{e} = (-\mathbf{a}) + \mathbf{b}$. A fentiek miatt $-\mathbf{a} = -3\mathbf{i}$, tehát $\mathbf{e} = -3\mathbf{i} + (-2\mathbf{j})$.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Milyen kapcsolatban van az $\overrightarrow{AD}$ a **b** és a **c** összegével?



Megoldás

Az ábra szerint az $\overrightarrow{AD}$ a szabályos hatszög átlóvektora, a **b** és **c** a hatszögnek az *A* pontból induló két oldalvektora, *K* a hatszög középpontja.

A szabályos hatszög tulajdonságaiból következik, hogy $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \overrightarrow{AK}$.

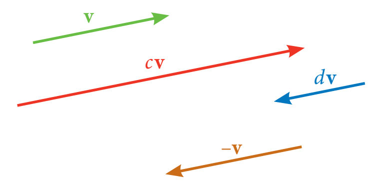
Ez egyállású és egyirányú az $\overrightarrow{AD}$-vel, és fele olyan hosszú.

Ezért azt is mondhatjuk, hogy

$\overrightarrow{AD} = 2(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ vagy másképp: $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

ELMÉLET

Definíció: vektor számszorosa



Egy c pozitív szám és egy $\mathbf{v}$ vektor szorzata az a vektor, amely a $\mathbf{v}$ vektorral egyállású és egyirányú, abszolút értéke pedig c-szerese a $\mathbf{v}$ abszolút értékének: $|c\mathbf{v}| = c \cdot |\mathbf{v}|$.
Egy d negatív szám és egy $\mathbf{v}$ vektor szorzata az a vektor, amely a $\mathbf{v}$ vektorral egyállású és ellentétes irányú, abszolút értéke pedig $|d|$-szerese a $\mathbf{v}$ abszolút értékének: $|d\mathbf{v}| = |d| \cdot |\mathbf{v}|$.
Fontos speciális eset: $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$, ez a $\mathbf{v}$ ellentettje.
A 0 és egy $\mathbf{v}$ szorzata a nullvektor: $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

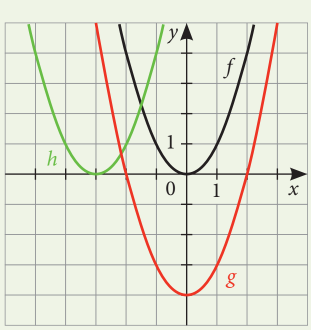
Kiegészítések

- A következő vektorok egyenlők:
  $(-3)\mathbf{a}$ [ez az $\mathbf{a}$-nak a (-3)-szorosa],
  $3(-\mathbf{a})$ (ez az $\mathbf{a}$ ellentettjének a 3-szorosa),
  $-(3\mathbf{a})$ (ez a $3\mathbf{a}$ ellentettje).
  Tehát $(-3)\mathbf{a} = 3(-\mathbf{a}) = -(3\mathbf{a}) = -3\mathbf{a}$. A $-3\mathbf{a}$ zárójel nélküli jelöléssel ezek közül bármelyikre gondolhatunk.
- „Negatív szám és vektor szorzása”, „két vektor különbsége”, „vektor ellentettje”: mindhárom esetben **ugyanazt a szimbólumot használjuk**: a „−” jelet, de mindhárom esetben teljesen más a jel matematikai tartalma (valós szám előjele, két vektor kivonásának jele, vektor ellentettjének a jele).
  Ezért nem „akadékoskodás” olyan egyszerűnek látszó dolgokon kissé elgondolkodni, hogy miért is írhatjuk például: $\mathbf{a} - (5\mathbf{b}) = \mathbf{a} + (-5)\mathbf{b} = \mathbf{a} + 5(-\mathbf{b})$, vagy a leggyakoribb felírással: $\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$.
- A bevezető feladatban $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, amit írhatunk így is: $\mathbf{c} = 1\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$.

FELADAT

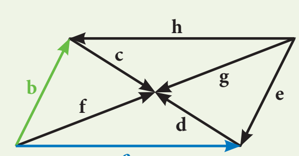
1 Mutasd meg, hogy a Bevezető feladat ábráján megadott $\mathbf{d}$ és $\mathbf{e}$ összege a $(-4\mathbf{j})$-vel egyenlő, és $\mathbf{d} - \mathbf{e} = 6\mathbf{i}$!

2 Jelöljük $\mathbf{i}$-vel azt a vektort, amely az origóból az $(1; 0)$ pontba vezet, $\mathbf{j}$-vel pedig azt, amelyik az origóból a $(0; 1)$ pontba vezet.
A 46. lecke házi feladatában foglalkoztál azokkal a vektorokkal, amelyekkel az itt lévő egyes parabolákat valamelyik másikba tolhatjuk el. Fejezd ki ezeket a vektorokat az $\mathbf{i}$ és a $\mathbf{j}$ segítségével!

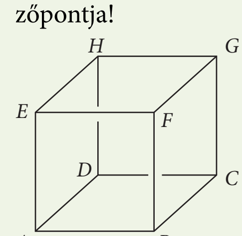


3 Egy paralelogramma két oldalvektora $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$. A paralelogrammába berajzoltunk néhány vektort. (A belső vektorok a szimmetriaközéppontba mutatnak.)
Keresd meg a berajzolt vektorok között az alábbi vektorokat:

$\frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$; $-\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$; $-\mathbf{a}$;
$\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$; $-\mathbf{b}$; $\frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$!



4 Az itt látható kockában legyen $\underline{a} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{b} = \overrightarrow{AD}$, $\underline{c} = \overrightarrow{AE}$. Írd fel ezeknek a vektoroknak a segítségével az alábbi vektorokat:
$\overrightarrow{BF}$; $\overrightarrow{CH}$; $\overrightarrow{BH}$; $\overrightarrow{DQ}$, ahol Q a BF szakasz felezőpontja!



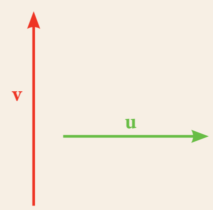
HÁZI FELADAT

1 **a)** Az **a** és a **b** azonos állású és azonos irányú vektorok, az **a** hossza 24 mm, a **b** hossza 6 mm. Írd fel az **a**-t a **b** számszorosaként és a **b**-t az **a** számszorosaként!

b) Az **a** és **b** azonos állású és ellentétes irányú vektorok, az **a** hossza 8 mm, a **b** hossza 10 mm. Írd fel az **a**-t a **b** számszorosaként és a **b**-t az **a** számszorosaként!

c) Az **a** és **b** azonos állású vektorok, az **a** hossza 16 mm, a **b** hossza 40 mm. Írd fel az **a**-t a **b** számszorosaként és a **b**-t az **a** számszorosaként! Hány lehetőség van?

2 Az **u** hossza 24 mm, a **v** hossza 32 mm, a két vektor merőleges egymásra. Szerkeszd meg a következő vektorokat, és számítsd ki az abszolút értéküket!



a) $2\mathbf{u}$, $2\mathbf{v}$, $-1{,}5\mathbf{v}$;

b) $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $2\mathbf{u}+2\mathbf{v}$, $2\mathbf{u}-2\mathbf{v}$;

c) $4\mathbf{u}+3\mathbf{v}$, $4\mathbf{u}-3\mathbf{v}$, $-\mathbf{u}-2\mathbf{v}$.

3 Vegyél fel egy koordináta-rendszert. Jelöld **i**-vel azt a vektort, amely a (2; 3) pontból a (3; 3) pontba mutat, **j**-vel pedig azt, amelyik a (−3; 4) pontból a (−3; 5) pontba mutat.

a) Rajzold meg a következő függvények grafikonját: $y = |x|$, $y = |x| + 3$, $y = |x - 4| + 3$!

b) Rajzold meg az összes olyan eltolásnak a vektorát, amely a megadott grafikonok valamelyikét egy másik megadott grafikonba viszi át!

c) Fejezd ki a b)-ben megrajzolt vektorok mindegyikét az **i** és a **j** segítségével!

RÁADÁS

I. Vektor számmal való szorzása

Most találkoztunk először olyan művelettel, amelynek két „szereplője” – egy szám és egy vektor – **nem ugyanabból a halmazból** való. Eddig minden esetben ugyanabból a halmazból választottuk a „szereplőket”: összeadtunk két számot, összeadtunk két vektort, két halmaz unióját vettük, kivontunk egymásból két számot, két vektort, két halmazt stb. Természetesnek vettük, hogy a művelet eredménye is ugyanabból a halmazból való, mint amelyből a két „szereplő”.

Ezúttal azonban nem ez volt a helyzet, meg kellett mondanunk, hogy a vektor számmal való „szorzása” eredményeként minden esetben vektort kapunk eredményül és sohasem számot (vagy valami mást)! Ezért aztán nyilván hibát követ el, aki azt írja, hogy $0\mathbf{a} = 0$, mert a 0 egy szám. Helyesen ezt kell írni: $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$. És persze $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$, bármely számot jelentsen is a k.

Jövőre látjuk majd, hogy $\mathbf{0a}$-nak is tudunk értelmet adni, s ebben az esetben $\mathbf{0a} = 0$, vagyis a 0 szám lesz a művelet eredménye. Ez a legfurcsább műveletek egyike, hiszen itt két vektorral végzett művelet eredményeként egy valós számot kapunk!

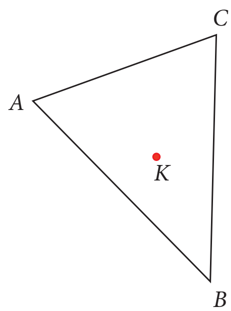
II. Vektorok a fizikában

A fizika szempontjából igen jelentős művelet a vektor számmal való szorzása.

Például

- A $2\mathbf{v}$ állandó sebességű test ugyanabba az irányba mozdul, mint az állandóan $\mathbf{v}$ sebességű, csak éppen ugyanakkora idő alatt kétszer akkora távolságra jut; a $-0{,}5\mathbf{v}$ állandó sebességű test az előbbi kettővel ellentétes irányban mozdul, de ugyanakkora idő alatt a $2\mathbf{v}$ sebességű által megtett útnak a negyedét, a $\mathbf{v}$ sebességgel haladó által megtett útnak a felét teszi csak meg.
- Ha egy testre három erő hat: $\mathbf{F}$; $1{,}5\mathbf{F}$ és $-2{,}5\mathbf{F}$, akkor ezeknek az összege $\mathbf{0}$, tehát a test tömegközéppontja vagy nyugalomban van, vagy állandó sebességgel halad, azaz a **sebességvektora** nem változik.

1. Az ABC háromszög körülírt körének középpontja K.



a) Szerkeszd meg paralelogramma-szabállyal az L pontot úgy, hogy $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB}$ legyen!

b) Milyen paralelogramma keletkezett?

c) Igazold, hogy az AB és a KL szakasz merőlegesen felezi egymást!

d) Szerkeszd meg paralelogramma-szabállyal az M pontot úgy, hogy $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KC}$ legyen!

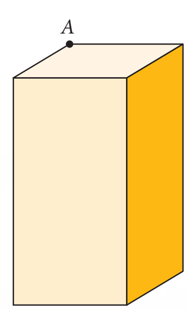
e) Igazold, hogy $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}$!

f) Igazold, hogy a CM egyenes merőleges az AB-re!

g) Szerkeszd meg a $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}$ vektort úgy, hogy a $\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}$ összeghez adod hozzá a $\overrightarrow{KA}$-t! Ennek alapján igazold, hogy az AM egyenes merőleges a BC-re!

h) Igazold, hogy M az ABC háromszög magasságpontja!

2. Igazold, hogy ha összeadjuk egy téglatest A csúcsából induló három élvektort, akkor az összeg egyenlő az A-ból induló testátlóvektorral!

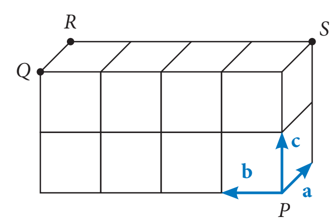


3. Egy téglatest élei 3 cm, 4 cm, 12 cm hosszúságúak.

a) Milyen hosszúak a téglatest testátlói?

b) Melyik vektor az A csúcsból induló három élvektor összege?

4. Az ábrán megadott téglatest 8 egybevágó kockából áll.



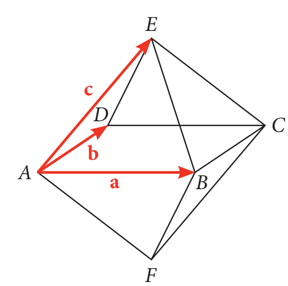
Fejezd ki az **a**, a **b** és a **c** vektor segítségével

a) a P-ben csatlakozó lapok P-ből induló átlóvektorait;

b) a P-ből induló testátlóvektort;

c) a Q-ból, az R-ből és az S-ből induló testátlóvektort!

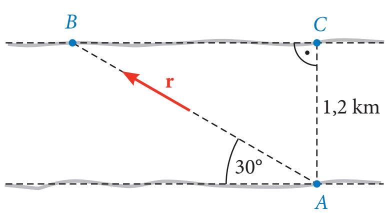
5. Az ábrán látható test egy szabályos oktaéder (nyolc szabályos háromszöglap határolja). Az $\overrightarrow{AB}$ élvektor legyen **a**, az $\overrightarrow{AD}$ élvektor **b**, az $\overrightarrow{AE}$ élvektor pedig **c** (az ábrán látható módon). Fejezd ki e három vektor segítségével az alábbi vektorokat: $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{EC}$; $\overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{FC}$!



50 VEKTOR FELBONTÁSA ÖSSZETEVŐKRE

KIDOLGOZOTT FELADAT

Katamarán indul a mesterséges tó egyik partjáról (A). A vízi jármű 1 másodperc alatt 12 m-t mozdul el, az 1 másodperc alatti elmozdulás vektora mindvégig az ábra szerinti (**r**).

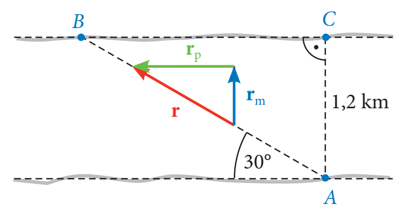


a) Mennyi idő alatt ér át a katamarán az 1,2 km távolságban levő szemközti partra (B-be)?

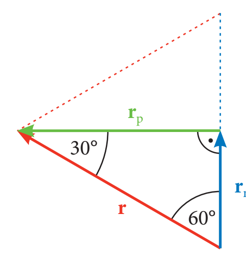
b) A parttal párhuzamosan húzódó úton egy autóra szerelt kamerával filmre veszik a katamarán mozgását. A minél élesebb felvétel érdekében a kamera rögzített állványon van, és az állványon nem mozgatható. Mekkora sebességgel haladjon az autó, hogy a katamarán mindig a partra merőlegesen beállított kamera látómezejének közepén helyezkedjen el?

Megoldás

Az **r** elmozdulásvektor megadható két olyan vektor összegeként is, amelyek egyike merőleges a mesterséges tó partjára ($\mathbf{r}_m$), a másik pedig párhuzamos vele ($\mathbf{r}_p$). E két vektor jelentése egyszerű: a partra merőleges $\mathbf{r}_m$ nagysága azt mutatja, másodpercenként hány méterrel lesz közelebb a katamarán a túlparthoz, a parttal párhuzamos $\mathbf{r}_p$ nagysága pedig azt mutatja, hogy másodpercenként hány méterrel kerül távolabb az AC egyenestől.



A megfelelő részletet kinagyítva és a szabályos háromszög tulajdonságait felhasználva kapjuk, hogy



$|\mathbf{r}_m| = \dfrac{|\mathbf{r}|}{2}$ és $|\mathbf{r}_p| = \dfrac{|\mathbf{r}|\sqrt{3}}{2}$.

Ez azt jelenti, hogy $|\mathbf{r}_m| = 6$ (méter) és $|\mathbf{r}_p| = 6\sqrt{3} \approx 10{,}4$ (méter).

a) A katamarán másodpercenként 6 méterrel kerül közelebb a túlparthoz, azaz 200 másodperc alatt éri el azt.

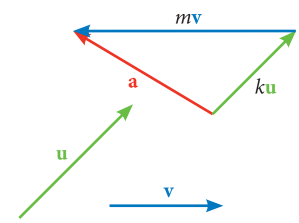
b) Az elmozdulásvektor parttal párhuzamos összetevőjének nagysága 10,4 m, tehát a parton haladó kamerának másodpercenként ugyanekkora utat kell megtennie. Az autó sebessége $10{,}4\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}} \approx 37{,}4\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.

Megjegyzés: a feladat vektorok alkalmazása nélkül is megoldható, ennek részletezésétől most eltekintünk.

ELMÉLET

Ha az **a**, az **u** és a **v** olyan, egy síkban lévő vektorok, hogy az **u** és a **v** nem egyállású, akkor az **a** felbontható két olyan vektor összegére, amelyek egyike az **u**-val, másika a **v**-vel egyállású. Az **u**-val egyállású vektor az **u**-nak egy számszorosa: $k\mathbf{u}$. Ez az **a**-nak az **u**-val párhuzamos (vagy **u** irányú) *összetevője*. A **v**-vel egyállású vektor a **v**-nek egy számszorosa: $m\mathbf{v}$. Ez az **a**-nak a **v**-vel párhuzamos (vagy **v** irányú) *összetevője*. Tehát $\mathbf{a} = k\mathbf{u} + m\mathbf{v}$.

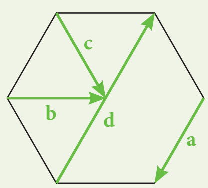
Amikor az **a** vektort $k\mathbf{u} + m\mathbf{v}$ alakban írjuk fel, akkor azt mondjuk, hogy az **a**-t *felbontottuk* az **u**-val és a **v**-vel *párhuzamos összetevőkre*.
Bebizonyítható, hogy a fenti módon megadott **a**, **u** és **v** esetében egyetlen ilyen $(k; m)$ rendezett valós számpár létezik.



FELADAT

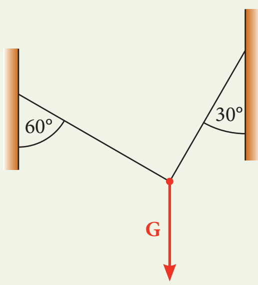
1 Fel lehet-e bontani a **c** vektort
- **a)** az **a** vektorral és a **b** vektorral;
- **b)** az **a** vektorral és a **d** vektorral;
- **c)** a **b** vektorral és a **d** vektorral párhuzamos összetevőkre?

Ha igen, akkor bontsd fel! Ha nem, akkor indokold meg, hogy miért nem! A füzetedben dolgozz!



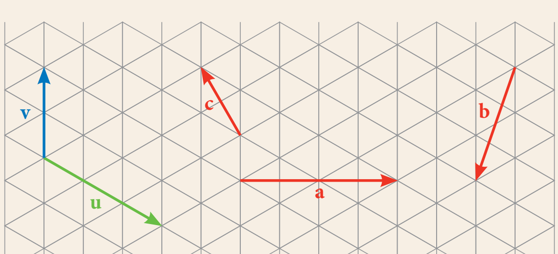
2 Használd az 1. feladat ábráját! Rajzold meg a következő vektorokat!
- **a)** $\mathbf{u} = 2\mathbf{b} + 0\mathbf{c}$
- **b)** $\mathbf{v} = 0\mathbf{b} + (-2)\mathbf{c}$
- **c)** $\mathbf{w} = 0\mathbf{b} + 0\mathbf{c}$

3 Hajlékony fonálra egy 20 newton súlyú tárgyat erősítettek az ábra szerint. Szerkeszd meg a tárgy súlyának (**G**) a tárgyat tartó két fonáldarabbal párhuzamos összetevőit, és számold ki ezek nagyságát is! A füzetedben dolgozz!



HÁZI FELADAT

1 Rajzold meg a következő vektorokat szabályos háromszögrácsban! A füzetedben dolgozz!
- **a)** $\mathbf{p} = \frac{1}{3}\mathbf{u} + 1\mathbf{v}$
- **b)** $\mathbf{q} = -1\mathbf{u} + \frac{3}{2}\mathbf{v}$
- **c)** $\mathbf{r} = -\frac{2}{3}\mathbf{u} + \left(-\frac{3}{2}\right)\mathbf{v}$
- **d)** $\mathbf{s} = \mathbf{u} - 2\mathbf{v}$
- **e)** Írd fel az **a**, **b**, **c** mindegyikét $k\mathbf{u} + m\mathbf{v}$ alakban!

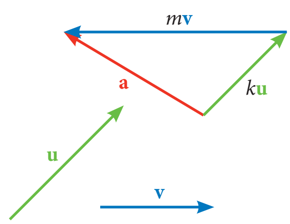


2 Használd az órai 1. feladat ábráját! Fel lehet-e bontani a **d** vektort
- **a)** az **a** vektorral és a **b** vektorral;
- **b)** az **a** vektorral és a **c** vektorral;
- **c)** a **b** vektorral és a **c** vektorral

párhuzamos összetevőkre?
Ha igen, akkor bontsd fel! Ha nem, akkor indokold meg, hogy miért nem!

51 BÁZISVEKTOROK

ELMÉLET



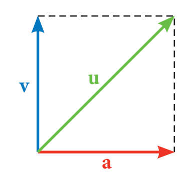
Legyen az **u** és a **v** két, egy síkban lévő, nem egyállású vektor. Ekkor a síkjukban lévő bármely **a** vektorhoz van olyan k és m szám, hogy $\mathbf{a} = k\mathbf{u} + m\mathbf{v}$.

Az **u**-t és **v**-t **bázisvektoroknak**, a két vektort együtt a sík egy **bázisrendszerének** nevezzük (röviden: bázis). Azt mondjuk, hogy k és m az **a**-nak erre a bázisrendszerre vonatkozó két **vektorkoordinátája**.

Ha egy bázisrendszer bázisvektorai **u** és **v**, továbbá megállapodunk abban, hogy **u** az első bázisvektor, **v** pedig a második bázisvektor, akkor ebben a bázisrendszerben az $\mathbf{a} = a_1\mathbf{u} + a_2\mathbf{v}$ ($a_1, a_2 \in \mathbf{R}$) kapcsolatot röviden így jelöljük: $\mathbf{a}(a_1;\ a_2)$.

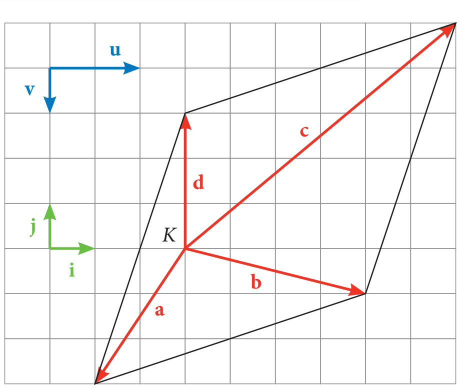
Megjegyzés
- A bázisrendszer (alaprendszer) elnevezést az indokolja, hogy a sík minden vektora felírható a két bázisvektor segítségével mint egy-egy számszorosuk összege.
- A bázisrendszer önkényesen választható. A sík vektorainak vektorkoordinátái függnek a választott bázisrendszertől.

Például az ábrán megadott négyzet **a** oldalvektora így bontható fel az **u**-val és a **v**-vel párhuzamos összetevőkre: $\mathbf{a} = \mathbf{u} - \mathbf{v} = 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$, tehát itt $k = 1$ és $m = -1$. Az **u**, **v** bázisrendszerben vektorkoordinátákkal felírva: $\mathbf{a}(1; -1)$.



Megjegyzés
Az **u** felbontható **a**-val és **v**-vel párhuzamos összetevőkre: $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{v} = 1\mathbf{a} + 1\mathbf{v}$;
a **v** felbontható **a**-val és **u**-val párhuzamos összetevőkre: $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{a} = 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{a}$.

KIDOLGOZOTT FELADAT



Két bázisrendszert adtunk meg: az **i**-ból és **j**-ból állót, illetve az **u**-ból és **v**-ból állót. Adjuk meg mindkét bázisrendszerben a K pontból a rombusz csúcsaiba mutató vektorok vektorkoordinátáit!

Megoldás
Mindkét bázisrendszer esetében ugyanazok a vektorok *összetevői*, hiszen a megadott két bázisrendszer bázisvektorai páronként párhuzamosak.
Az **i**, **j** bázisrendszer bázisvektorainak hossza megegyezik a négyzetrács legkisebb négyzetének hosszával, ezért könnyen láthatók a következők:
$\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + (-3)\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + (-1)\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ és $\mathbf{d} = 0\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$,
az **u**, **v** bázisrendszerben pedig: $\mathbf{a} = -1\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{u} + 1\mathbf{v}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{u} + (-5)\mathbf{v}$ és $\mathbf{d} = 0\mathbf{u} + (-3)\mathbf{v}$.

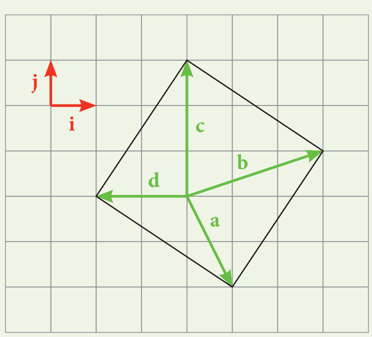
A táblázat a vektorkoordinátákat mutatja:

	A vektorkoordináták							
Melyik vektor?	a		b		c		d	
Hányadik koordináta?	első	második	első	második	első	második	első	második
Az **i**, **j** bázisrendszerben	−2	−3	4	−1	6	5	0	3
Az **u**, **v** bázisrendszerben	−1	3	2	1	3	−5	0	−3

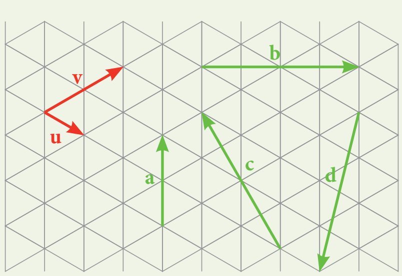
Most
az **i**, **j** bázisrendszer esetében: **a**(−2; −3), **b**(4; −1), **c**(6; 5) és **d**(0; 3),
míg az **u**, **v** bázisrendszerben: **a**(−1; 3), **b**(2; 1), **c**(3; −5) és **d**(0; −3).

FELADAT

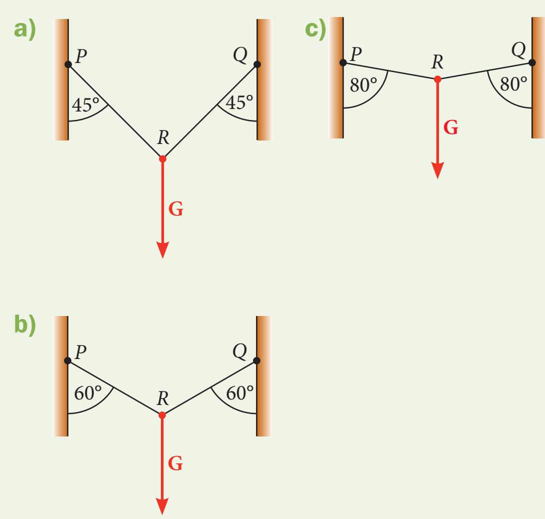
1 **a)** Add meg az **a**, **b**, **c**, **d** vektorkoordinátáit az **i**, **j** bázisrendszerben!
b) Add meg a két bázisvektor vektorkoordinátáit is!



2 **a)** Megadtuk az **u**, **v** bázisrendszert. Fejezd ki az **a**, **b**, **c**, **d** vektorokat vektorkoordinátákkal!
b) Add meg a két bázisvektor vektorkoordinátáit is!



3 Hajlékony fonálra 40 N súlyú testet akasztunk úgy, hogy az ábra szerint az *R* felezőpontban legyen a felfüggesztési pont. Szerkeszd meg a **G**-nek a két fonáldarabbal párhuzamos összetevőit! Az a) és b) esetben számolással, a c) esetben méréssel állapítsd meg az összetevő erők nagyságát!



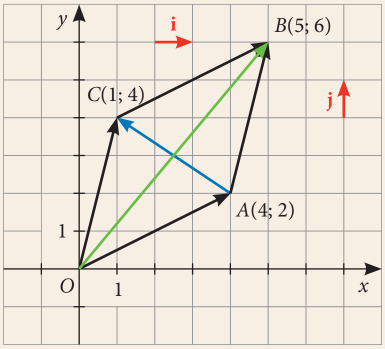
4 Azt tartják, hogy a ruhaszárító kötelet hagyni kell „belógni”, különben a kötél könnyen elszakad. Mi lehet ennek az oka?

HÁZI FELADAT

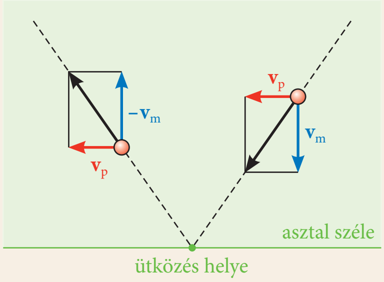
1 **a)** Az **i**, **j** bázisrendszerben add meg az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorkoordinátáit! (*O* a koordináta-rendszer origója.)

b) Számítsd ki az a)-ban megadott vektorok hosszát (hosszegységnek a koordináta-rendszer tengelyein adott hosszegységet tekintve)!

c) Hogyan bizonyítanád be, hogy az *OABC* négyszög paralelogramma, de nem rombusz?



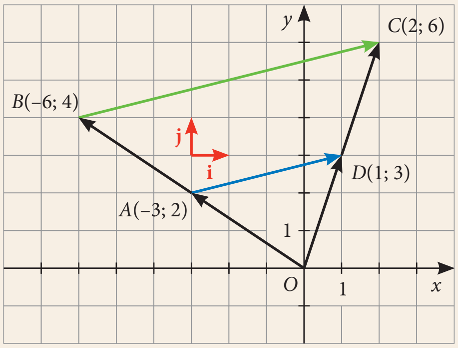
2 Az ábra alapján magyarázd el, mi történik a biliárdgolyónak az asztal szélével történő ütközésekor! Figyelj a biliárdgolyó pályájára is!



3 **a)** Az **i**, **j** bázisrendszerben add meg az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorkoordinátáit! (*O* a koordináta-rendszer origója.)

b) Számítsd ki az a)-ban megadott vektorok hosszát (hosszegységnek a koordináta-rendszer tengelyein adott hosszegységet tekintve)!

c) Hogyan bizonyítanád be, hogy az *ABCD* négyszög trapéz, de nem húrtrapéz?

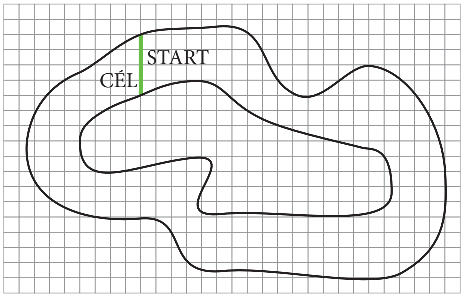


RÁADÁS

„Autóverseny" – egy régi játék. A játékhoz egy négyzethálós lapra van szükség, ahová először tetszés szerint megrajzoljuk a versenypályát, majd a pályán valamely rácsvonal mentén a startvonalat:

A játék szabály a következő:

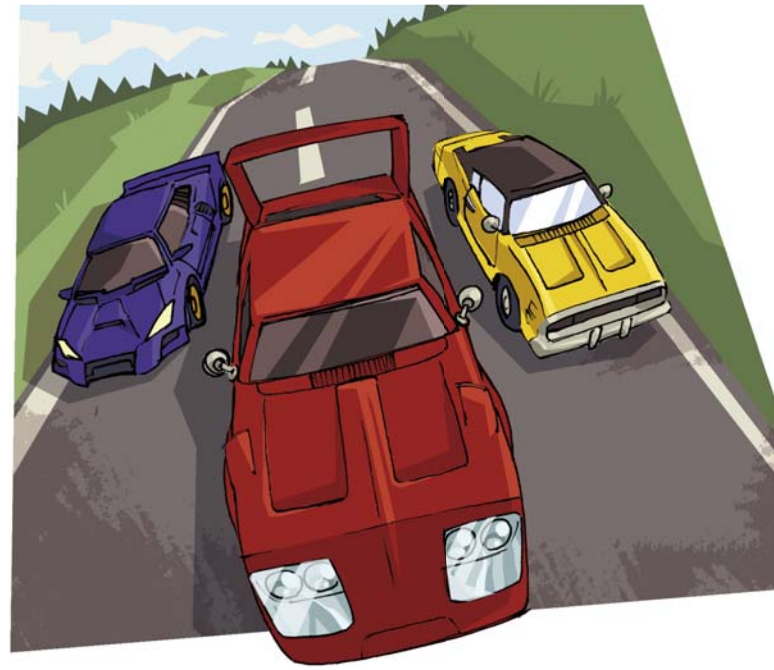
A játékosok egymás után felhelyezik a versenyautójukat (különböző színű ponttal jelölve) a startvonal valamely rácspontjára. Ezután felváltva fognak lépni, a következő szabályok szerint:

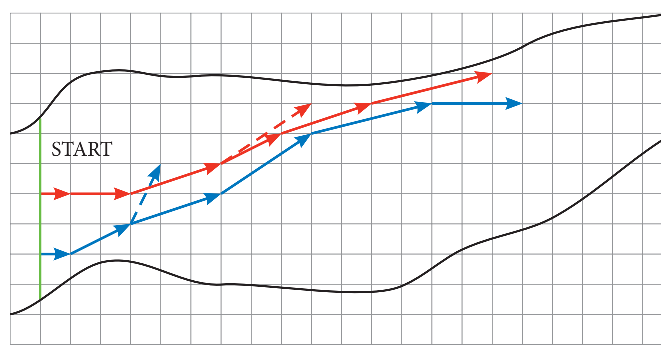


1. Minden lépést egy nyíllal jelölnek, ami a kocsi legutóbbi helyzetét köti össze a lépés után helyzettel.
2. Első lépésként bármely szomszédos csúcsra lehet lépni.

3. Minden további lépést úgy kell végezni, hogy az előző lépést ismételjük meg, és az így elért rácsponthoz képest – ha akarunk – egy szomszédos rácspontra kerülhetünk. Ilyen módon lehet kanyarodni, gyorsítani, lassítani, vagy akár tartani is a sebességünket.
4. Ha valaki a legutolsó lépésével keresztezi egy másik játékos legutolsó lépését (annak kezdeti helyétől a végső helyéig), akkor mindkét játékos balesetet szenved és kiesnek a játékból.
5. Ha valaki a pálya vonalán kívülre kénytelen lépni, akkor balesetet szenved, és kiesik a játékból.
6. Ha egy játékos elkerülheti a balesetet (tehát léphet úgy, hogy azzal a lépéssel ne ártson magának vagy másnak), akkor el kell kerülnie azt.
7. A játékot az a játékos nyeri meg, aki nem szenved balesetet, és a legkevesebb lépésben tud eljutni a CÉL-ig. Ha ugyanabban a körben többen érnek célba, akkor közöttük döntetlen az eredmény.

Az ábrán láthatók Bence (piros) és Jocó (kék) egymást követő lépései.





FELADATOK

1. Ⓚ Fogalmazd meg a vektorok nyelvén a játék szabályait! Vigyázz! A „balesetekre" vonatkozó szabályokban nem használhatod az „egymást metsző vektorok" fogalmát, hiszen ilyesmit nem értelmezünk!

2. Ⓚ Ellenőrizd, hogy Bence és Jocó lépései szabályosak-e!

3. Ⓚ Vajon ki kezdte a játékot?

4. Ⓚ A szaggatott vonalas lépéseken a srácok gondolkodtak ugyan, de végül mégsem lépték meg őket. Milyen okuk lett volna meglépni a lépést, és miért döntöttek végül úgy, hogy nem fognak lépni?

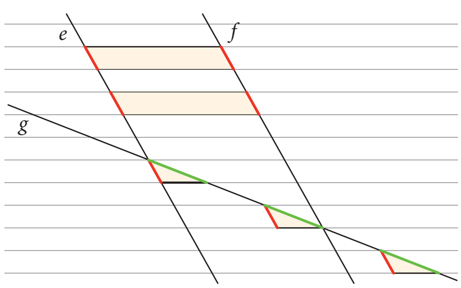
5. Ⓚ Játsszatok autóverseny játékot az osztálytársaiddal! Szedjétek össze tapasztalataitokat, és adjatok „hasznos tanácsokat" a kezdő játékosoknak!

6. Ⓚ Bence és Jocó játék közben felírták az összes lépésükhöz tartozó vektor koordinátáit. Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igazak vagy hamisak-e!
A győztes játékos lépéseihez tartozó vektorok összege biztosan 0.
A győztes játékos lépéseihez tartozó vektorok összege bármi lehet.
A győztes játékos lépéseihez tartozó vektorok összegének első koordinátája biztosan 0.
A győztes játékos lépéseihez tartozó vektorok összegének első koordinátája természetes szám.
A győztes játékos lépéseihez tartozó vektorok összegének második koordinátája természetes szám.

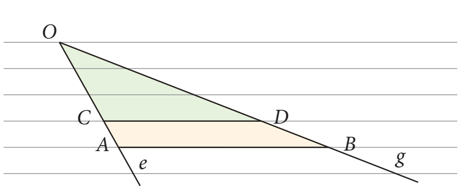
52 PÁRHUZAMOS EGYENESEK

BEVEZETŐ

Egy vonalas füzetlapon olyan egyeneseket húzunk, amelyek nem párhuzamosak a vonalazással. Az e és az f egymással párhuzamos, a g metszi őket, mégpedig éppen a füzet egy-egy vonalán.
Az e, az f és két szomszédos vonal között egybevágó kis paralelogrammák keletkeznek (egybevágók, mert egy eltolással átvihetők egymásba). Eszerint az e és az f egyenesen a vonalazás egyenlő szakaszokat jelöl ki.
A g egyenesen is egyenlő szakaszok keletkeznek, hiszen a kis háromszögek is átvihetők egymásba egy-egy eltolással. A g-n keletkező szakaszok (az ábrán látható esetben) nagyobbak, mint amilyeneket az e-n és az f-en látunk.



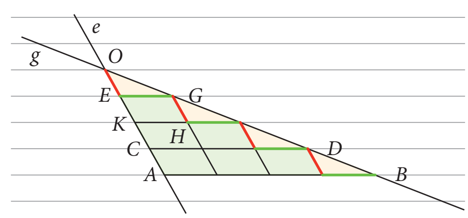
Az e egyenes, a g egyenes és a füzet vonalazása háromszögeket jelöl ki. Hasonlítsunk össze két ilyen háromszöget, például az OAB és az OCD háromszöget:



– megfelelő szögeik egyenlők, mert egyállású szögek;
– az e egyenesen lévő oldaluk aránya ugyanannyi, mint a g egyenesen lévő oldaluk aránya: $OA : OC = 4 : 3$ és $OB : OD = 4 : 3$.

Sőt, ha a harmadik oldalaikat hasonlítjuk össze, azoknak az aránya is ugyanennyi: $AB : CD = 4 : 3$. Ez könnyen belátható, ha mindkét háromszöget az OEG háromszöggel

egybevágó „kis” háromszögekre és az $EGHK$ paralelogrammával egybevágó „kis” paralelogrammákra bontjuk.

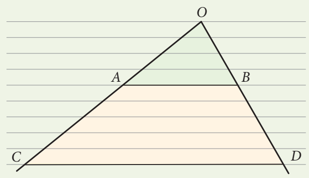


Megjegyzés
Az $EGHK$ paralelogramma EH átlóját megrajzolva láthatjuk, hogy egy kis paralelogramma területe kétszerese az OEG háromszög területének. Az OAB háromszög területe tehát 16-szor akkora, mint az OEG háromszög területe, az OCD háromszög területe pedig az OEG háromszög területének 9-szerese.
Érdekes, hogy $\frac{16}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$.

A bevezető feladat megállapításainak egyszerű következménye az alábbi kijelentés:
Ha egy szög két szárát olyan párhuzamos egyenesekkel metsszük el, amelyek a szög egyik szárából egyenlő szakaszokat metszenek ki, akkor a szög másik szárán is egyenlő szakaszok keletkeznek.

FELADAT

1 Vonalas lapon megrajzoltunk két háromszöget az ábra szerint.



a) Az ábrán lévő távolságok közül néhányat megadunk. Számold ki a többi távolságot, és töltsd ki a táblázat üres mezőit!

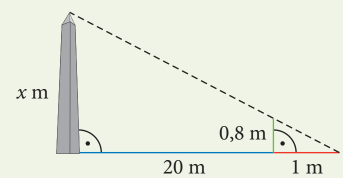
	OA	OB	OC	OD	AC	BD	AB	CD
1. feladat	4			7,2			4,4	
2. feladat					8	6		18

b) Készíts hasonló feladatot, vonalas füzetbe rajzolt egyenesekkel! Készíts hozzá (az előzőhöz táblázatot, add meg a táblázat három adatát, és határozd meg abban az esetben a többi távolságot!

c) Az alábbi táblázatban van olyan sor, amelyik olyan adatokat tartalmaz, amelyek együtt nem lehetségesek. (az adatok az eddigieknek megfelelő, vonalas füzetlapon készített feladathoz tartoznak) Válaszd ki a megoldható feladatokat, és indokold meg, miért nem oldható meg a többi!

	OA	OB	OC	OD	AC	BD	AB	CD
1. feladat	4			11,7			4	9
2. feladat		6			8		6	11
3. feladat	10					20	12	27
4. feladat			18	20,7			9,6	20,7

2 Egy torony talpától 20 m távolságban a talajra merőlegesen leszúrt 0,8 m hosszú pálca árnyéka éppen 1 méter hosszú. A vonalas füzet ötletét alkalmazva (lásd az ábrát) mutasd meg, hogy a torony magasabb 16,1 méternél!

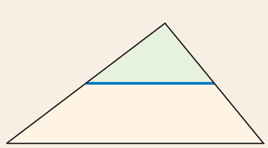


3 Egy trapéz párhuzamos oldalai 10 cm és 16 cm hosszúak. Kössük össze a trapéz szárainak felezőpontjait! Mi a keletkező két rész területének aránya?

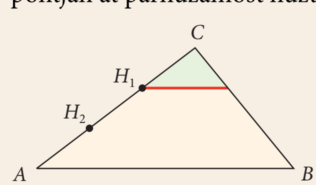
HÁZI FELADAT

1 Amikor egy 18 m magas fa árnyéka 12 m hosszú, akkor hány méter hosszú a 15 m, a 12 m, illetve a 22 m magas fa árnyéka? Indokold a válaszodat!

2 A kék szakasz a háromszög két oldalának felezőpontját köti össze (a háromszög *középvonala*). Bontsd fel az alatta lévő trapézt a fölötte lévő kis háromszöggel egybevágó részekre! Hány háromszögre bomlik a trapéz?



3 Az ABC háromszög AC oldalának H_1 harmadolópontján át párhuzamost húztunk az AB oldallal.



a) Milyen arányú részekre bontja a piros szakasz a BC oldalt?

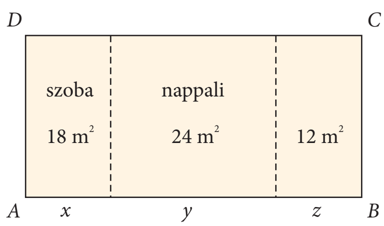
b) Mutasd meg, hogy az AB szakasz háromszor olyan hosszú, mint a piros szakasz!

c) Bontsd fel a keletkezett trapézt a fölötte lévő kis háromszöggel egybevágó részekre! Hány háromszögre bomlik a trapéz?

53 PÁRHUZAMOS SZELŐK TÉTELE

KIDOLGOZOTT FELADAT

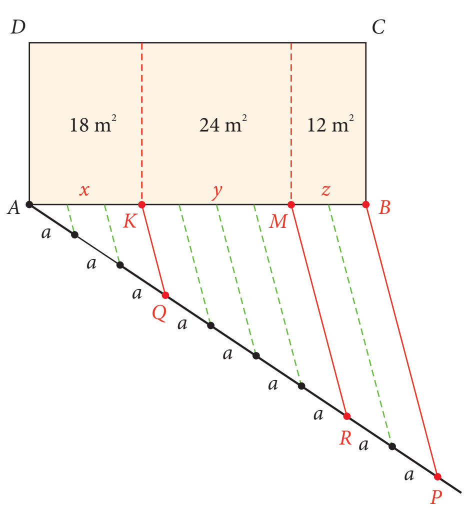
Egy 54 m^2-es lakótelepi lakás alaprajza téglalap. A két elválasztó fal három téglalap alakú részt hoz létre: egy 18 m^2-es szobát, egy 24 m^2-es nappalit és a többi helyiség (előszoba, konyha, fürdőszoba és WC) számára egy 12 m^2-es téglalapot. A műszaki rajzolónak csak a lakás alaprajzának a vázlatát adta oda a tervező, a megfelelő utasításokkal. A rajzoló feladata megszerkeszteni ezen az ábrán a két elválasztó fal helyét. Hogyan teheti ezt meg?



Megoldás

A három téglalap területének aránya $18 : 24 : 12 = 3 : 4 : 2$, ezért az AB oldalra illeszkedő oldalaik aránya ugyanennyi (hiszen az erre merőleges oldalaik egyenlő hosszúak). A rajzoló feladata tehát az, hogy az AB szakaszt ossza fel szerkesztéssel három részre úgy, hogy a részek hosszának arányára az $x : y : z = 3 : 4 : 2$ összefüggés igaz legyen.

A szerkesztés – az előző lecke bevezető feladatának ötlete (a vonalas lap) alapján – az ábrán nyomon követhető:



– Egy A kezdőpontú félegyenest rajzolunk, amelynek egyenesén nincs rajta a B pont.

– A megrajzolt félegyenesre A-tól indulva kilenc egyenlő hosszúságú, egymáshoz csatlakozó szakaszt mérünk fel (mert az arányszámok összege $3 + 4 + 2$, vagyis 9). A kilencedik szakasz A-tól távolabbi végpontja legyen a P pont. Megrajzoljuk a PB szakaszt.

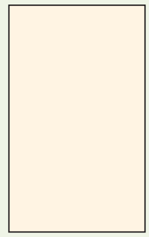
– A harmadik és a hetedik szakasz A-tól távolabbi végpontján (Q-n, illetve R-en) keresztül párhuzamost szerkesztünk a PB-vel. E két párhuzamosnak az AB-vel való metszéspontjai (K, illetve M) adják a keresett osztópontokat az AB szakaszon.

Megjegyzés

Közelítő megoldásnak megfelelne az, hogy a rajzoló megméri az AB szakasz hosszát, majd elosztja ezt 9-cel ($3 + 4 + 2 = 9$). Ezután rendre felmér az AB szakaszra egy 3-szor ilyen hosszú, majd ehhez csatlakozva egy 4-szer ilyen hosszú szakaszt. Egy műszaki rajzoló számára ez a megoldás nem elfogadható, mert rajzeszközeivel ennél az eljárásnál pontosabban tudja megszerkeszteni a kívánt osztópontokat.

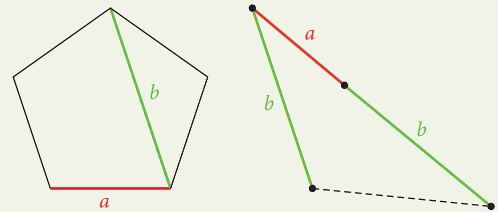
FELADAT

1 **a)** A valóságban egy téglalap alakú telek területe 539 m^2. A telket valamelyik oldalával párhuzamos egyenessel 2 : 5 területarányú két részre kell felosztani. Szerkeszd meg a két lehetséges, lényegesen különböző felosztást a kicsinyített ábrán! A füzetedben dolgozz!



b) A két megszerkesztett egyenes 4 részre vágja a téglalapot. Hány m^2 az egyes részek területe a valóságban?

2 A szabályos ötszög oldala a cm, az átlója b cm hosszúságú. Az átlót két olyan részre kell bontani, amelyek aránya ugyanakkora, mint az $a : b$ arány. Hogyan segít ebben a felbontásban a jobb oldali rajz? Lehet, hogy van még egyszerűbb szerkesztési mód?



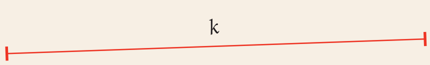
3 Vegyél fel a füzetedben egy 11 cm hosszúságú szakaszt!

a) Szerkessz szabályos háromszöget, melynek kerülete az adott szakasz hosszával egyenlő!

b) Szerkessz egyenlőszárú háromszöget, melynek kerülete az adott szakasz hosszával egyenlő, és egyik oldala másfélszer olyan hosszú, mint egy másik oldala! Hány megoldást találsz?

HÁZI FELADAT

1 **a)** Egy háromszög kerülete akkora, mint a k szakasz, oldalainak aránya 3 : 3 : 4. Szerkeszd meg ezt a háromszöget!



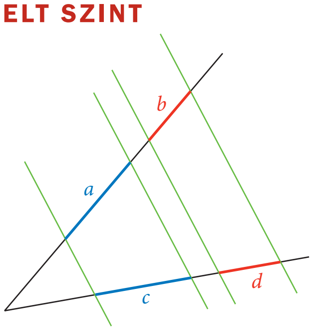
b) Egy téglalap oldalhosszúságainak aránya 2 : 3, a kerülete akkora, mint a k szakasz. Szerkeszd meg ezt a téglalapot!

2 Rajzolj egy 8 cm hosszúságú szakaszt, és szerkeszd meg ennek

a) 4 : 2 : 3, **b)** 3 : 1 : 3

arányú osztópontjait!

EMELT SZINT



Az előző leckében a vonalas füzetlap segítségével sok érdekes összefüggést találtunk. Ezek részben a **párhuzamos szelők tételének** speciális esetei voltak.
Általánosan is igaz ugyanis az alábbi állítás:

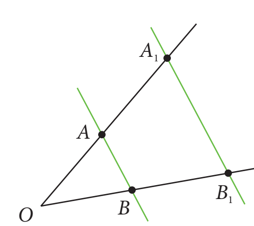
Tétel: Ha egy szög két szárát párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor az egyik száron keletkezett szakaszok hosszának az *aránya* megegyezik a másik száron nekik megfelelő szakaszok hosszának az *arányával*.

Például (az ábra jelöléseivel) $a : b = c : d$.

Megjegyzés
Az aránypár átrendezésével adódik, hogy $a : c = b : d$, ami azt fejezi ki, hogy egy *adott szög* esetén *adott állású* párhuzamosokkal csak olyan szakaszokat metszhetünk ki a szögszárakból, amelyek aránya bármely két megfelelő szakasz esetén ugyanannyi.

A párhuzamos szelők tétele fennáll akkor is, ha egyes szakaszok részben fedik egymást vagy az egyik része a másiknak.

Például itt, a jobb oldali ábrán igaz, hogy $OA_1 : OA = OB_1 : OB$.

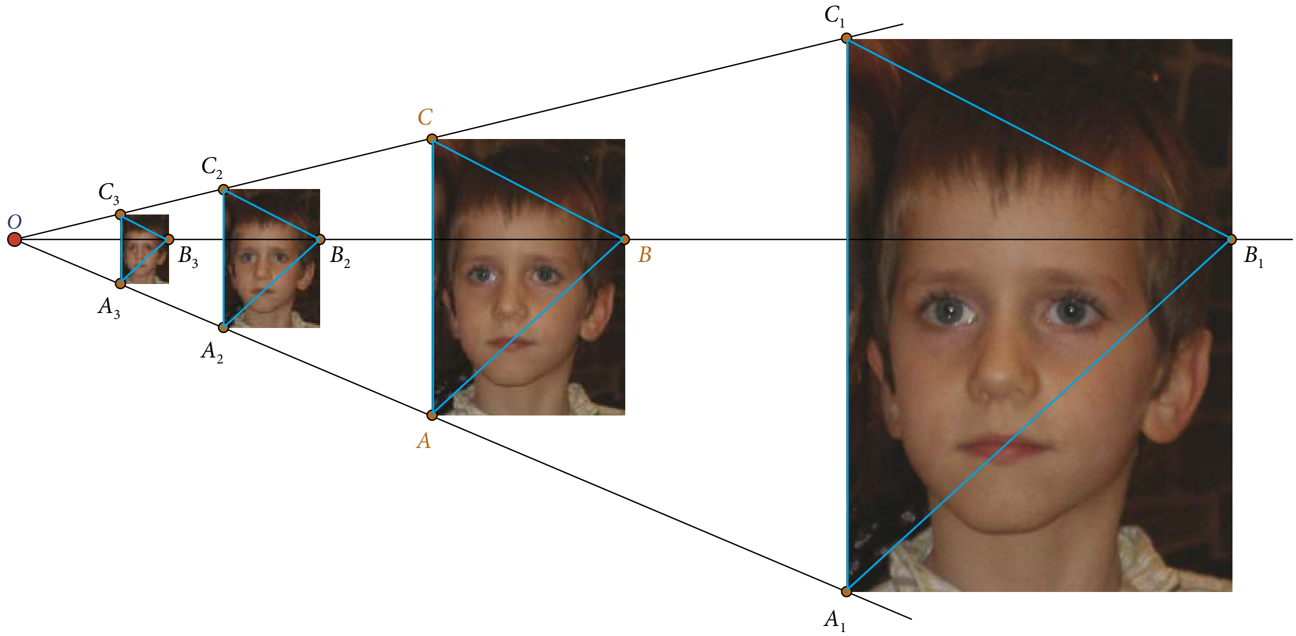


54 KÖZÉPPONTOS NAGYÍTÁS, KICSINYÍTÉS

BEVEZETŐ

„…Aztán az egyik fotón felfigyel egy apró részletre. **Nagyítást** készít a képről, egészen addig, amíg rá nem döbben arra, hogy **egy pisztolyt tartó kezet** lát a **bokrok között**. …” *(Nagyítás, 1966; a filmet Michelangelo Antonioni rendezte)*

Az idézett mozifilmben az eredeti képről készült egyre nagyobb arányú nagyítások mindegyikénél olyan kép jön létre, amelyen az eredetileg egyenesnek látszó vonalak szintén egyenesnek látszanak, amelyen az eredeti kép távolságainak aránya ugyanakkora marad, amelyen az eredeti képen megmért szögek ugyanakkora szögek maradnak. Egyszóval a *formák*, az *alakok* megmaradnak, nem torzulnak a nagyítás során: a kéz kéznek, a pisztoly pisztolynak és a bokor bokornak látszik mindegyik nagyításban. A pisztoly csöve mindegyik képen ugyanannyiszor hosszabb, mint az őt tartó kéz hüvelykujja, a bokor magassága ugyanannyiszorosra nő, mint a pisztoly hossza.



Hogyan lehet nagyítani, kicsinyíteni?

A fotókról optikai úton készülő nagyítások – nagyon leegyszerűsítve – **középpontos nagyítással** készülnek. Ennek lényegét mutatja a mellékelt képsorozat, amely egy kisfiú eredeti képének kétszeresre **nagyított**, felére, illetve negyedére **kicsinyített** változatát mutatja.

Ha az eredeti képen megjelölünk három pontot (A, B, C), akkor láthatjuk, hogy az O középpontú kétszeres nagyításnál: $OA_1 = 2 \cdot OA$, $OB_1 = 2 \cdot OB$, $OC_1 = 2 \cdot OC$. Így van ez az összes többi ponttal is: például a kisfiú „orra hegye” a nagyított képen kétszer akkora távolságra van az O ponttól, mint az eredetin.

A negyedére kicsinyített kép esetében minden O-tól mért távolság a negyede az eredeti távolságnak, a felére kicsinyített képen pedig ugyanez az arány 1 : 2.

Az egymásnak megfelelő szakaszok párhuzamosak (például $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$), illetve egy egyenesbe esnek, ha a szakasz egyenese átmegy az O ponton (például OA, OA_1, OA_2 és OA_3). Ebből az következik, hogy az ABC háromszög szögei ugyanakkorák, mint a másik három háromszög megfelelő szögei. Ez minden más szögre ugyancsak igaz: **bármely szögnek a középpontos nagyítás során kapott képe ugyanakkora, mint az eredeti szög**.

A „vonalas füzetlap” módszere segítségével azt is könnyen beláthatjuk, hogy a kétszeres nagyításnál minden szakasz kétszer olyan hosszúvá válik, a negyedére kicsinyítésnél minden szakasz negyedakkora lesz, mint az eredeti képen: például $A_1B_1 = 2 \cdot AB$, $A_3C_3 = \frac{1}{4} \cdot AC$.

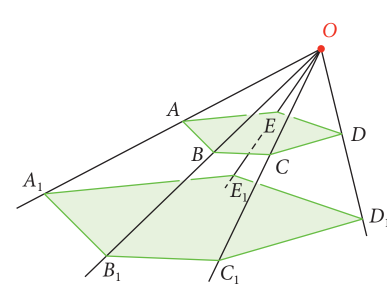
Érthetővé válik ezek alapján, hogy mit jelent a „forma”, az „alak” megmaradása:

- a háromszögek esetében egyszerűen arról van szó, hogy az ABC háromszög bármelyik két oldalának arányát nézzük, ez ugyanannyi, mint a nagyított, illetve kicsinyített háromszög megfelelő két oldalának aránya; hiszen ha egy háromszög minden oldalának hosszát például kétszeresére változtatjuk, akkor a háromszögoldalak aránya nem változik meg;
- a kisfiú arcának bármely két részletét hasonlítjuk össze az egyik képen, a megfelelő méretek aránya mindegyik képen ugyanakkora lesz.

Megjegyzés

Egy síkbeli ponthalmaz nagyítható a síkjának valamely pontjából, de a síkján kívüli pontból is. A fotók nagyítása általában nem a kép síkjában, hanem térben megvalósuló folyamat.

A mellékelt ábra egy ötszög olyan kétszeres nagyítását szemlélteti, amelynél a nagyítás középpontja (O) nincs benne az ötszög síkjában.



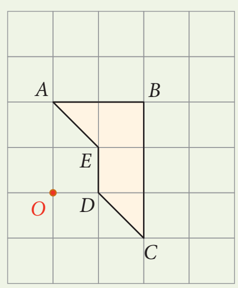
FELADAT

1 Adott a nagyítás középpontja (O) és aránya (k).

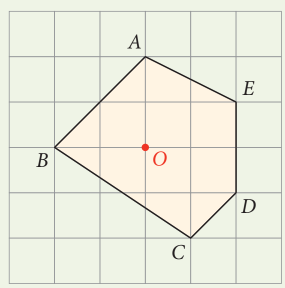
a) A négyzetháló segítségével nagyítsd (kicsinyítsd) a megadott alakzatot a füzetedben!

b) Számold ki az eredeti és a nagyított síkidom kerületét és területét (a hosszúságegység a rács legkisebb négyzetének oldalhossza legyen)! Hányszorosa a nagyított síkidom kerülete, illetve területe az eredetinek? Foglald az eredményeidet táblázatba!

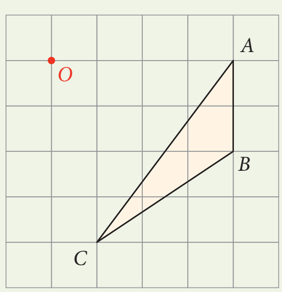
A) $k = 2$



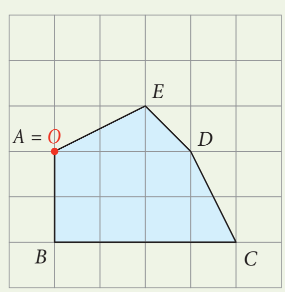
C) $k = \frac{3}{2}$



B) $k = \frac{3}{4}$

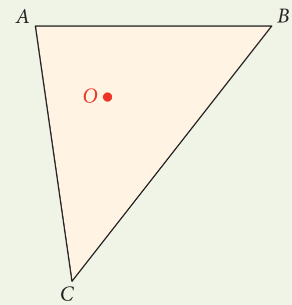


D) $k = 0{,}5$

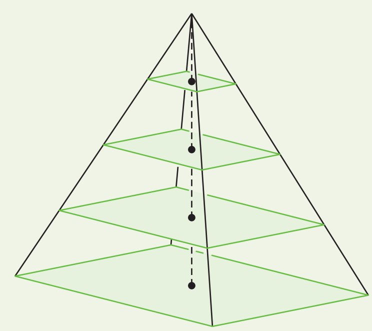


2 Szerkeszd meg a füzetedben az ABC háromszög O középpontú nagyítottját (kicsinyítettjét), ha a hasonlóság aránya

a) $k = \frac{3}{2}$;   **b)** $k = \frac{3}{4}$!



3 Egy négyoldalú szabályos tömör gúla alapéle 8 cm, magassága 12 cm. A gúlát az alaplapjával párhuzamos három síkkal négy részre vágjuk úgy, hogy a szomszédos párhuzamos síkok távolsága 3 cm legyen.



a) Jelöld a megadott távolságokat az ábrán!

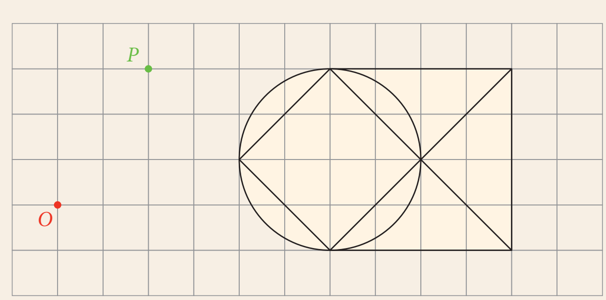
b) Milyen testek keletkeztek a részekre vágás során, milyen sokszögek határolják ezeket a testeket?

c) Mekkora területűek a szétvágásnál keletkező síkmetszetek (a színezett négyszögek)?

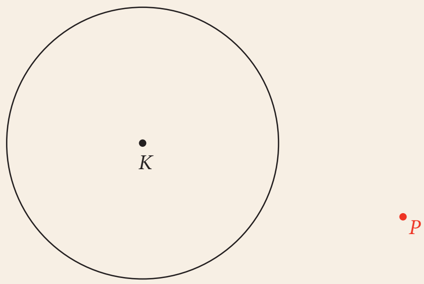
d) A síkmetszetek mindegyike átvihető egy másikba középpontos nagyítással. Válassz ki két síkmetszetet, add meg a megfelelő nagyítás középpontját és arányát!

HÁZI FELADAT

1 Másold át a füzetedbe a jobb oldali ábrát! Nagyítsd a megadott tervrajzot másfélszeresére az O pontból, majd a P pontból! Igazold, hogy a két nagyított ábra egy eltolással egymásba átvihető! Add meg egy lehetséges eltolás vektorát!



2 Kicsinyítsd a kört mindkét megadott pontból (P és K) a $\frac{3}{5}$-ére! A füzetedben dolgozz!



3 A Bevezetőben a kisfiúról készült képsorozattal kapcsolatosak a kérdések.

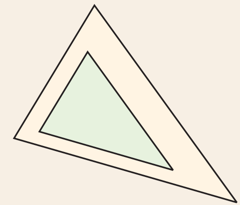
a) Hányszoros nagyítása a legnagyobb kép a legkisebbnek?

b) Mekkora annak az O középpontú kicsinyítésnek az aránya, amelynél az $A_1B_1C_1$ háromszög képe az $A_2B_2C_2$ háromszög?

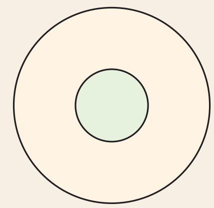
c) Hányszor akkora területű a legnagyobb kép, mint a legkisebb?

4 Hol van a nagyítás középpontja? Szerkeszd meg!

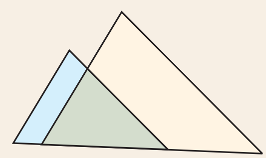
a)



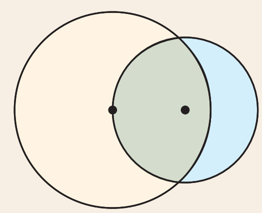
b)



c)

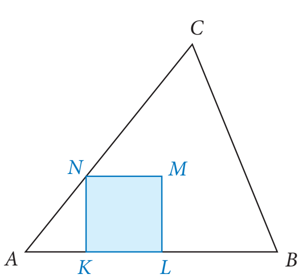


d)



EMELT SZINT

Írjunk az adott ABC háromszögbe olyan négyzetet, amelynek két csúcsa az AB, egy-egy csúcsa pedig az AC, illetve a BC szakaszon van!

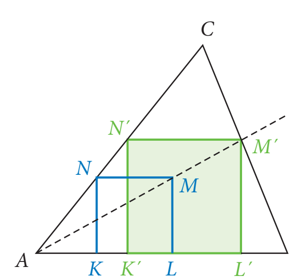


Megoldás

Egy kisebb, $KLMN$ négyzetet a bal oldali ábra szerint úgy helyezünk el, hogy három csúcsa, a K, az L és az N a követelményeknek megfelelően helyezkedjék el.

Az M csúcs az egyetlen, amely még nincs a „helyén", a BC oldalon.

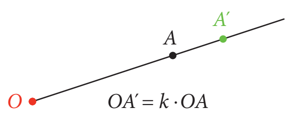
Most az A pontból olyan középpontos nagyítást alkalmazunk, amellyel az M pont M' képe a BC szakaszra kerül. A szerkesztésnél felhasználjuk, hogy a négyzetnek és a képének a megfelelő oldalegyenesei illeszkedők vagy párhuzamosak; a K és az L pont az AB egyenesen, az N pont az AC egyenesen mozdul el. A $KLMN$ négyzet képe, a $K'L'M'N'$ négyzet tehát megfelel a feladat követelményeinek (jobb oldali ábra).



55 KÖZÉPPONTOS HASONLÓSÁG

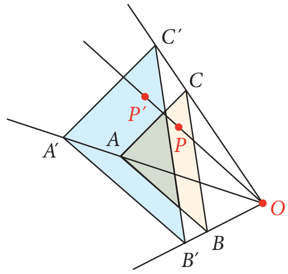
ELMÉLET

A középpontos nagyítás és kicsinyítés *általánosítása* egy újabb geometriai transzformáció, a **középpontos hasonlóság** megalkotásához vezetett.



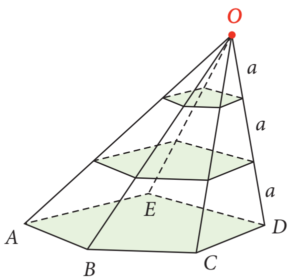
Definíció: Megadunk egy O pontot és egy pozitív számot, k-t. Ha a tér minden egyes A pontjához az OA félegyenesnek azt az A' pontját rendeljük hozzá, amelyre igaz, hogy az OA' szakasz k-szor akkora, mint az OA, akkor egy transzformációt adtunk meg. Neve: **középpontos hasonlóság**.

Itt az O-t *középpontnak*, a k-t pedig *a hasonlóság arányszámának* nevezzük. Ez *középpontos nagyítás*, ha $k > 1$, *középpontos kicsinyítés,* ha $k < 1$, egybevágósági transzformáció, ha $k = 1$.



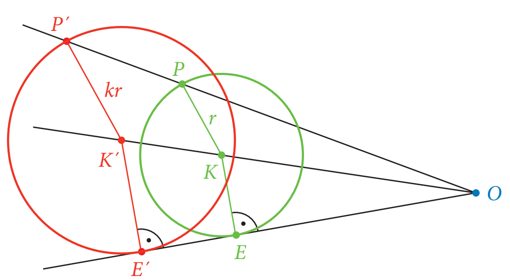
Definíció: Ha két ponthalmazhoz van olyan középpontos hasonlóság, amely az egyiket a másikba viszi át, akkor ezeket a ponthalmazokat *középpontosan hasonlóknak* mondjuk.

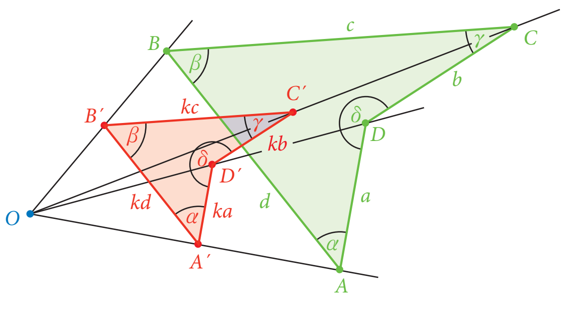
Például az ABC háromszög középpontosan hasonló az $A'B'C'$ háromszöghöz; az $ABCDEO$ gúlához középpontosan hasonló a másik két, szintén O csúcsú gúla (amelyeknek az alaplapja párhuzamos az $ABCDE$ lappal).



Az O középpontú, k arányszámú középpontos hasonlóság esetén:

– **pont képe pont;**
– **egyenes képe egyenes, ez egybeesik az eredeti egyenessel, ha ez az egyenes illeszkedik az O pontra, párhuzamos az eredeti egyenessel, ha ez az egyenes nem illeszkedik az O pontra;**
– **szög képe vele egyenlő szög;**
– **szakasz képe k-szor olyan hosszú szakasz, mint az eredeti.**





A középpontos hasonlóság további fontos tulajdonságai:

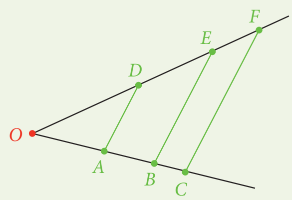
– kör képe k-szor akkora sugarú kör, mint az eredeti;
– sokszög képe sokszög, e két sokszög megfelelő szögei egyenlők, megfelelő oldalai párhuzamosak vagy egy egyenesbe esnek, megfelelő oldalaik hosszának aránya k-val egyenlő.

A középpontos hasonlóság tulajdonságai vizsgálhatók a *GeoGebra* programmal is.

FELADAT

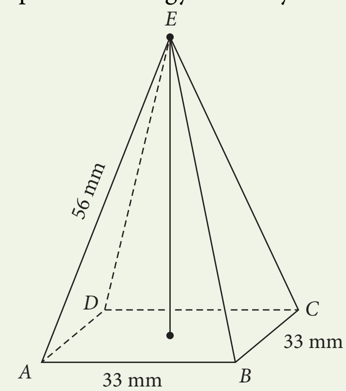
1 Igaz-e, hogy bármely két nem egybevágó
a) négyzet; **b)** kocka; **c)** egy síkban fekvő kör; **d)** gömb
középpontosan hasonló?

2 Az O csúcsú szög szárait párhuzamosokkal metszettük. Két-két keletkezett síkidomról azt állítjuk, hogy középpontosan hasonlók. Melyik állítás igaz, melyik hamis, és miért?
a) OAD háromszög és OBE háromszög;
b) OCF háromszög és OBD háromszög;
c) $ABED$ trapéz és $BCFE$ trapéz;
d) $ABED$ trapéz és $ACFD$ trapéz.



3 Nagyíts középpontosan egy négyzetet, a nagyítás arányszáma legyen 2! Mennyi a nagyított és az eredeti négyzet kerületének aránya, és mennyi a területük aránya?

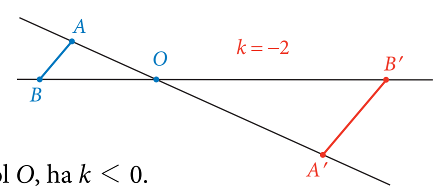
4 Az $ABCDE$ szabályos gúlát középpontos hasonlósággal nagyítjuk az E pontból. A nagyítás aránya
a) 2; **b)** 8; **c)** 100; **d)** $\sqrt{2}$.
Mekkorák a nagyított gúlák alapélei és oldalélei? Mekkora a nagyított gúlák alapterülete? Mekkorák az oldallapok területei?



5 Folytasd az előző feladatot! Számítsd ki, hányszorosa a nagyított gúlák alapterülete az $ABCD$ négyzet területének! Mi mondható el az oldallapok területéről?

ELMÉLET

Ki lehet terjeszteni a középpontos hasonlóság fogalmát úgy, hogy k értéke negatív is lehet. Negatív k esetén egy pont és képe a középponthoz képest különböző félegyenesre esnek.
Definíció: középpontos hasonlóság:
Adjunk meg a síkon egy O pontot és egy $k \neq 0$ számot!
Ekkor a sík bármely A pontjának képét megkaphatjuk a következőképpen:
a) O pont képe önmaga
b) az O-tól különböző A pont képe az a A' pont, melyre,
(1) O, A és A' egy egyenesen vannak, (2) $\frac{OA'}{OA} = |k|$
(3) A' az OA félegyenes pontja, ha $k > 0$, de A'-t és A-t elválasztja egymástól O, ha $k < 0$.



HÁZI FELADAT

1 Vegyél fel a füzetedben egy 5 cm sugarú kört! Kicsinyítsd a kört úgy, hogy a hasonlóság arányszáma 0,5 és
a) a hasonlóság középpontja legyen a kör középétől kétszer akkora távolságra, mint a kör sugara;
b) a hasonlóság középpontja legyen a körvonalon!

2 Vegyél fel a füzetedben egy 8 cm oldalú szabályos háromszöget! Kicsinyítsd az egyik oldalfelező pontjából úgy, hogy a kicsinyítés arányszáma 0,5! Számold ki a kicsinyített és az eredeti háromszög kerületét, területét, majd határozd meg a kerületek arányát és a területek arányát is!

3 Egy gömb sugara 6 cm. Kicsinyítjük a gömböt úgy, hogy a hasonlóság arányszáma 0,5. Számold ki a kicsinyített és az eredeti gömb felszínét és térfogatát, majd határozd meg a felszínek arányát és a térfogatok arányát is! (A gömb felszínét az $A = 4\pi r^2$ képlettel, térfogatát a $V = \frac{4\pi}{3} r^3$ képlettel számolhatod ki.)

56 HASONLÓSÁG

BEVEZETŐ

Egy mérnök észrevette, hogy egy fontos alkatrész tervrajzát bent hagyta az irodájában a tervezőasztalon. Telefonál az egyik munkatársának, Jánosnak:
– Légy szíves, küldd el nekem a 6-os hengersor rajzát!
János látja, hogy a tervrajz túl nagy ahhoz, hogy beférjen az A/4-es méretű másológépbe (szkennerbe), ezért 1 : 4 arányú *középpontos kicsinyítést* végez. Az így kapott ábra megfelelő méretű, így beszkenneli, majd egy elektronikus levél (e-mail) mellékleteként gyorsan elküldi a munkatársa számítógépére. A mérnök kinyomtatja a rajzot A/4-es méretben.

Milyen kapcsolat van a kinyomtatott és az eredeti rajz között?

A középpontos hasonlósággal kapott ábrán
- minden szög ugyanakkora, mint az eredetin,
- minden szakasz negyedakkora, mint az eredeti szakasz.

Ezt küldte el János egyik számítógépről a másikra. Eközben sem a szögek nagysága, sem a szakaszok hossza nem változott meg, tehát a megérkezett rajz egybevágó azzal, amit János küldött. A nyomtatás is ezekkel egybevágó rajzot eredményezett.
Tehát a mérnök a 6-os hengersor tervrajzának pontos kicsinyített változatát kapta, ezzel dolgozhat tovább. *Azt mondjuk, hogy ez az ábra* **hasonló** *az irodában lévő eredeti tervrajzhoz.* Nemcsak *hasonlít hozzá*, nemcsak *olyasmi, mint az*, hanem *matematikai szakkifejezéssel:* **hasonló**.

Nézzük azt a tervrajzot, amelyet János a kicsinyítéssel kapott! Ez
- középpontosan hasonló az eredeti tervrajzzal, és
- egybevágó azzal a tervrajzzal, amelyet a mérnök kinyomtatott.

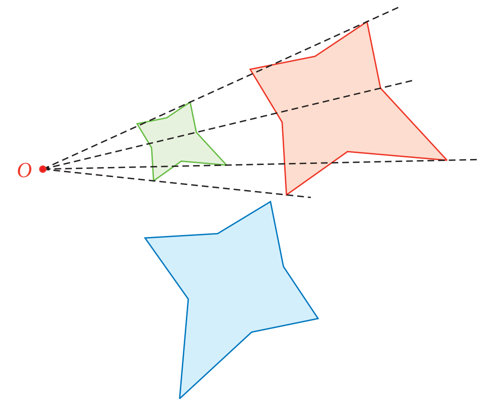
A kicsinyítéssel kapott tervrajz a „közvetítő” a két **hasonló** rajz (az eredeti és a kinyomtatott) között.

ELMÉLET

Ha egy ponthalmaz középpontosan hasonló képét valahova elmozdítjuk, és/vagy tükrözzük, akkor a keletkező harmadik ponthalmazra azt mondjuk, hogy ez **hasonló** az első ponthalmazhoz. A hasonlóság jele: ~
A középpontos hasonlóság arányszáma egyúttal az itt fellépő hasonlóságnak is arányszáma.

Másképp: Két ponthalmazt hasonlónak mondunk, ha van hozzájuk egy olyan harmadik, amely az egyikkel középpontosan hasonló, a másikkal pedig egybevágó.

Például a zöld nyolcszög középpontos nagyítása a rózsaszínű nyolcszög. A nagyítás aránya $\frac{11}{5}$. A rózsaszínű nyolcszög elmozdítható úgy, hogy éppen a kék nyolcszöget kapjuk meg. Ezért azt mondjuk, hogy *a zöld és a kék sokszög hasonló*. A rózsaszínű sokszög oldalai $\frac{11}{5}$-ször akkorák, mint a zöld sokszög megfelelő oldalai, és ugyanekkorák a kék nyolcszög oldalai is. A három sokszög megfelelő szögei mind egyenlők.

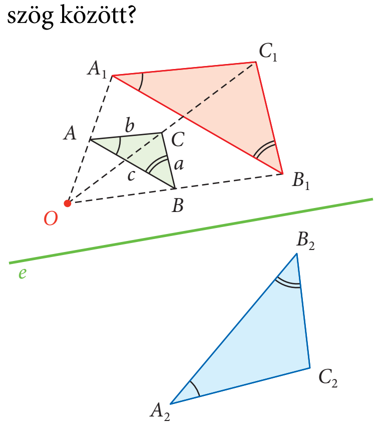


Megjegyzés
A zöld és a rózsaszín nyolcszögre is mondhatjuk, hogy hasonlók. Ezzel kevesebbet állítunk a két sokszögről, mint ami valójában teljesül rájuk, hiszen *a középpontos hasonlóság a hasonlóság különleges esete*.

A szemléltetés *GeoGebra* programmal is elvégezhető.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Az ABC háromszög oldalhosszúságai: 15 mm (a), 19 mm (b) és 26 mm (c). Ezt kétszeresére nagyítottuk az O pontból, majd a nagyított képet tükröztük az e egyenesre. Milyen kapcsolat van a három háromszög között?



Megoldás
- A nagyítással kapott $A_1B_1C_1$ háromszög **középpontosan hasonló** az eredeti ABC háromszöghöz, ezért egyben hasonló is a két háromszög: $A_1B_1C_1\triangle \sim ABC\triangle$. A hasonlóságuk arányszáma 2. A nagyított háromszög oldalai: $a_1 = 30$ mm, $b_1 = 38$ mm és $c_1 = 52$ mm, szögei ugyanakkorák, mint az ABC háromszög megfelelő szögei.
- Az $A_1B_1C_1$ háromszög és az $A_2B_2C_2$ háromszög **egybevágó**, hiszen az e egyenesre való tükrözéssel egymásba átvihetők: $A_1B_1C_1\triangle \cong A_2B_2C_2\triangle$. Oldalaik hossza egyenlő ($a_2 = 30$ mm, $b_2 = 38$ mm és $c_2 = 52$ mm), megfelelő szögeik egyenlők.
  (Mondhatnánk azt is, hogy a két háromszög hasonló, és a hasonlóságuk arányszáma 1.)
- Az $A_2B_2C_2$ háromszög **hasonló** az eredeti ABC háromszöghöz: $A_2B_2C_2\triangle \sim ABC\triangle$, a hasonlóságuk arányszáma 2.

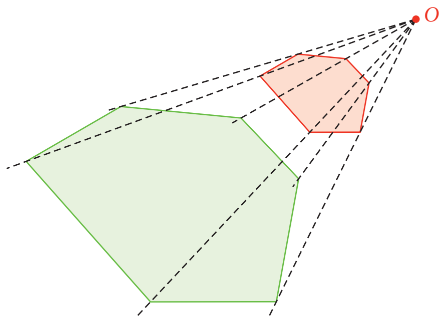
Tehát
- mindhárom háromszögnek ugyanakkorák a szögei;
- az *eredeti* háromszög oldalai hosszának mindkét hozzá *hasonló* háromszögben kétszer akkora hosszúságú oldal felel meg:
  $\frac{a_1}{a} = \frac{a_2}{a} = 2$, $\quad \frac{b_1}{b} = \frac{b_2}{b} = 2$, $\quad \frac{c_1}{c} = \frac{c_2}{c} = 2$;
- bármelyik háromszög három oldalának arányát nézve, ez mindhárom háromszög esetében ugyanannyi: $a : b : c = a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2 = 15 : 19 : 26$.

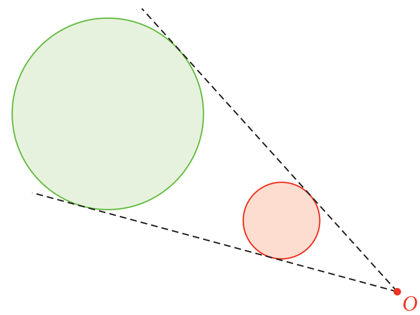
2. Milyen kapcsolatban van az előző feladatban szereplő $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszög kerülete, illetve területe?

Megoldás
Az *egybevágósági transzformáció* nem változtatja meg sem a kerületet, sem a területet, ezért a két háromszögnek a kerülete is és a területe is egyenlő.

ELMÉLET

Ha egy sokszöget (vagy bármely más síkidomot) k arányszámmal középpontosan nagyítunk, akkor a nagyított alakzat kerülete az eredeti kerületnek k-szorosa, a nagyított alakzat területe az eredetinek k^2-szerese.



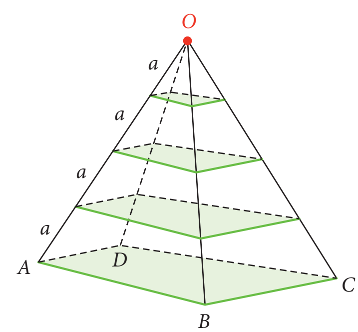


Ha egy testet k arányszámmal középpontosan nagyítunk, akkor a nagyított test felszíne az eredetinek k^2-szerese, a nagyított test térfogata az eredetinek k^3-szorosa.

Például

– az ábra $ABCD$-vel párhuzamos síkú sokszögei *kerületének* aránya (a legkisebbtől indulva): 1 : 2 : 3 : 4; a *területük* aránya: 1 : 4 : 9 : 16;

– a legkisebb gúla felszínétől indulva az ábra O csúcsú gúlái *felszínének* aránya: 1 : 4 : 9 : 16; *térfogatuk* aránya pedig 1 : 8 : 27 : 64 (tehát az $ABCDO$ gúla felszíne 16-szor akkora, mint a legkisebb gúla felszíne, térfogata pedig 64-szerese a legkisebb gúla térfogatának).



A fenti megfigyelések nem csak a középpontosan hasonló alakzatok esetén állnak fenn. Bizonyítható, hogy:

– két **hasonló** sokszög (vagy bármely más síkidom) kerületének aránya a hasonlóságuk arányszámával (k-val), területének aránya a hasonlóságuk arányszámának négyzetével (k^2-tel) egyenlő;

– két **hasonló** test felszínének aránya a hasonlóságuk arányszámának négyzetével (k^2-tel), térfogatának aránya a hasonlóságuk arányszámának köbével (k^3-nal) egyenlő.

FELADAT

1 Egy háromszög oldalainak hosszúsága 12 cm, 15 cm és 16 cm. Egy hozzá hasonló másik háromszög egyik oldala 10 cm-es.

a) Melyik szám lehet a hasonlóság arányszáma?

b) Mekkora lehet a másik háromszög többi oldala?

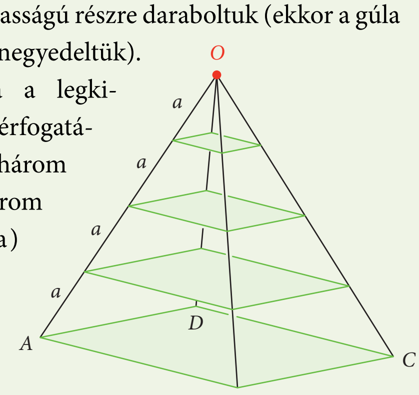
2 Egy háromszög oldalainak hosszúsága 10 cm, 10 cm és 12 cm. Egy hozzá hasonló másik háromszögnek

a) a kerülete 16 dm; **b)** a területe 12 cm^2.

Mekkorák a másik háromszög oldalai?

3 Egy gúla alapja 4 cm-es oldalú négyzet, magassága 12 cm. Három párhuzamos síkkal (amelyek párhuzamosak az $ABCD$ négyzet síkjával is) a gúlát négy egyenlő magasságú részre daraboltuk (ekkor a gúla oldaléleit is negyedeltük).

Hányszorosa a legkisebb gúla térfogatának a másik három rész (a három csonkagúla) térfogata?



HÁZI FELADAT

1. Bármely két négyzet hasonló. Melyik szám lehet a hasonlóság arányszáma, ha

a) az egyik négyzet oldala 24 mm, a másiknak a kerülete 24 mm;

b) az egyik négyzet oldala 25 mm, a másiknak a területe 25 cm^2;

c) az egyik négyzet kerülete 25 mm, a másiknak a területe 25 cm^2?

2. Az *ABCD* téglalap oldalai 3 cm illetve 12 cm hosszúak. Vágd szét a téglalapot egy egyenessel két olyan téglalapra, hogy az egyik levágott rész hasonló legyen az *ABCD* téglalaphoz! Mekkorák a levágott részek oldalai?

3. Apuka 180 cm magas. Milyen magas lehet anyuka és a két gyerek? Milyen bizonytalansággal kell számolnod?

EMELT SZINT

ELMÉLET

Definíció: Hasonlósági transzformáció

Egy középpontos hasonlóság és egy egybevágósági transzformáció egymásutánját **hasonlósági transzformációnak** nevezzük. A hasonlósági transzformációban szereplő középpontos hasonlóság arányszámát a **hasonlóság arányszámának** mondjuk.

Megjegyzés

- két középpontosan hasonló alakzat egyben hasonló is, hiszen az egybevágósági transzformáció lehet maga a helyben hagyás is;
- ha egy síkidomot, testet középpontosan nagyítunk, majd a nagyított képet eltoljuk, elforgatjuk, tükrözzük (bármelyiket akár többször is végrehajtva), akkor az eredetihez hasonló síkidomot, testet kapunk.

ELMÉLET

Hasonló ponthalmazok (alakzatok)

A hasonlósági transzformáció az eredeti ponthalmazhoz hasonló ponthalmazt rendel hozzá. A hasonlóság jele: ~

Hasonló ponthalmazok esetén

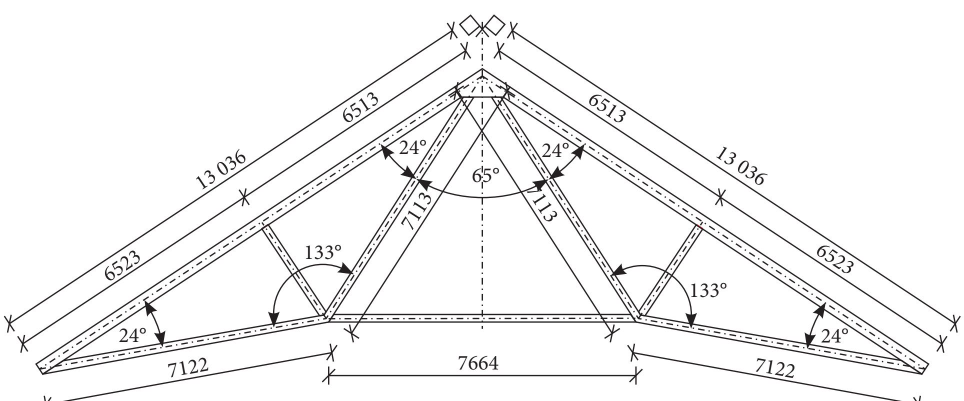
- a megfelelő szakaszok hosszának aránya ugyanannyi,
- a megfelelő szögek egyenlők,
- a megfelelő síkidomok területének aránya egyenlő a hasonlósági arány négyzetével,
- a megfelelő testek felszínének aránya egyenlő a hasonlósági arány négyzetével,
- a megfelelő testek térfogatának aránya egyenlő a hasonlósági arány köbével.

MIT MUTAT A TERVRAJZ?

BEVEZETŐ

A Gyulai Várfürdő egyik épületét (eredeti feladatkörére utalva) Lovardának nevezik. Egy 20 méteres gyógyvizes úszómedence, három kis gyógymedence és egy gyerekpancsoló van benne.

A fényképen látszik, milyen szép faváz tartja belülről az üvegezett tetőt. Az úszómedence fölött 9 párhuzamos, függőleges síkban ugyanolyan, háromszögekből álló gerendázat (tartóváz) van. Egy ilyen részlet tervrajzát megkaptuk a tervezőktől (itt kicsinyítve mutatjuk meg):



1 : 100 Gyulai Várfürdő tartóváz
Fajzi Építészeti Stúdió, Békéscsaba

a) Mit jelent a tervrajzon az 1 : 100 jelzés?

b) Milyen mértékegységekben tünteti fel a rajz a hosszúságokat?

c) Hogy lehet az, hogy a bal oldali nagy háromszögben a két rövidebb oldal nem egyenlő, a velük szemben fekvő szögek mégis 24°-osnak vannak feltüntetve a tervrajzon?

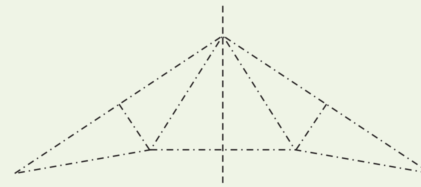
d) Hogy lehet az, hogy a két nagy háromszögben a belső szögek összege 181°?

e) Mit jelölhetnek a pontozott vonalak?

f) Hány egyenlő szárú háromszög van ebben a tartóvázban?

FELADAT

1 Az ábrán a Bevezető feladatban látható tervrajz egyszerűsített változatát látod.



a) Hány milliméteresek az ábrán azok a szakaszok, amelyek mellé a tervrajzban a 7113 szám van írva?

b) Töltsd ki a táblázat üres helyeit a füzetedben!

	Mértékegység	Mérőszám				
A tervrajzra írt hosszúság		13 036	6523	7113	7122	7664
A tervrajzon mérhető hosszúság	mm					
Az ábrán mért hosszúság	mm					
A valóságos hosszúság	méter	13,036				

c) Mennyi a nagyítási arány az ábra és a tervrajz között?

d) Mennyi a kicsinyítési arány a valóságos hosszúságok és az ábra között?

e) Egész fokra kerekítve mekkorák a háromszögek szögei az ábrán?

2 A Bevezető feladatban látható tervrajzfényképen nem látjuk, mekkora a leghosszabb (szélső) gerendákra merőleges rövid gerenda. Számítsd ki, hány milliméter ez

a) a valóságban, **b)** az eredeti tervrajzon, **c)** a tervrajz fényképén!

Milyen kapcsolat van a kapott három hosszúság között?

3 A Lovarda feszített víztükrű, gyógyvizes úszómedencéje 20 m hosszú, 13 m széles, a mélysége az egyik végénél 120 cm, a másiknál 160 cm, közben egyenletesen mélyül.

a) Készíts erről a medencéről vázlatrajzot!

b) Szerkeszd meg 1 : 200 kicsinyítésben a 4 oldallapot! Milyen négyszögek ezek?

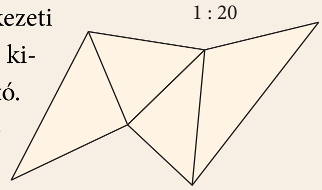
c) Mekkorák a medence alaplapjának az oldalai?

d) Bence elképzelte, hogy a medence tele van vízzel. Kijelentette, hogy ez a víztömeg egy egyenes hasábot alkot. Jocó szerint téved, mert az alaplap nem párhuzamos a fedőlappal, sőt nagyobb is. Melyik fiúnak van igaza? Ha Jocó szerint Bence téved, akkor mire gondol Jocó, amikor **alaplapot** és **fedőlapot** mond?

HÁZI FELADAT

1 Az ábrán egy szerkezeti elem 1 : 20 arányú kicsinyített rajza látható. Szerkessz a füzetedben

1 : 20



a) a megadottal egybevágó ábrát;

b) olyan ábrát, amely a szerkezeti elem 1 : 10 arányú kicsinyítése!

2 Válaszd ki a Bevezető feladatban megadott tervrajz alapján a Lovarda tetőszerkezetének egy részletét! Készítsd el ennek a vázát a tervrajzon látható méretekkel száraztésztából (spagettiből) vagy hurkapálcából!

3 Készítsd el papírból a Lovarda úszómedencéjének a modelljét! A 20 méteres hosszúság helyett vegyél 12 cm-t!

57 ALKALMAZZUK A HASONLÓSÁGOT!

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. **a)** Az 1 : 3000 méretarányú térképen egy téglalap alakú telek oldalainak hossza 3,2 cm és 3,8 cm. Mekkora a telek területe?

b) Az 1 : 3 000 000 méretarányú térképen mekkora Magyarország területe?

Megoldás

a) A valódi téglalap oldalai 3000-szer akkorák, mint a térképen: $3000 \cdot 3{,}2 = 9600$ (cm), illetve $3000 \cdot 3{,}8 = 11\,400$ (cm), vagyis 96 m, illetve 114 m. A téglalap alakú telek valódi területe tehát négyzetméterben számolva: $96 \cdot 114 = 10\,944$. A mérések pontatlansága miatt ez természetesen közelítő érték. Ezért a helyes válasz az, hogy a telek területe megközelítőleg 11 000 m^2, vagy másképp 1,1 hektár.

b) Magyarország területe megközelítőleg 93 000 km^2. A térképen a kicsinyített országot látjuk, a hasonlóság aránya $k = \frac{1}{3\,000\,000}$. A hasonló síkidomok területéről tanultak szerint a térképen Magyarország területe $93\,000 \cdot k^2$ (km^2).

A „túl nagy” számok miatt célszerű normálalakot használni.

A térképen Magyarország területe: $9{,}3 \cdot 10^4 \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot 10^6}\right)^2 = 9{,}3 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^{12}} \approx 1{,}03 \cdot 10^{-8}$ (km^2).

A térkép területét nem szokás négyzetkilométerben megadni, váltsuk át cm^2-be!

Tudjuk, hogy 1 km = 10^5 cm, ezért 1 km^2 = $(10^5)^2$ cm^2 = 10^{10} cm^2. Így $1{,}03 \cdot 10^{-8}$ km^2 = $1{,}03 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{10}$ cm^2 = 103 cm^2.

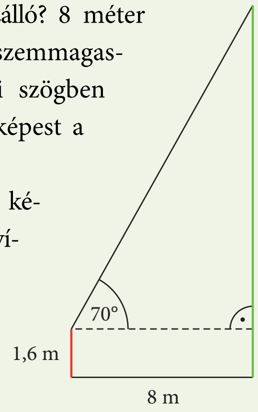
Magyarország területe a térképen körülbelül 103 cm^2 ($\approx$ 1 dm^2).

FELADAT

1. Mekkora a 900 m^2-es telek területe az 1 : 300 méretarányú tervrajzon?

2. Milyen magas a Gyöngyszálló? 8 méter távolságból és 1,6 méter szemmagasságból 70°-os emelkedési szögben láthatjuk a vízszinteshez képest a szálloda tetejét.

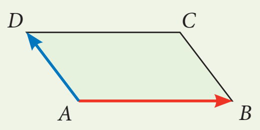
a) Szögmérő segítségével készítsd el az ábra kicsinyített képét, a 8 méter helyett vegyél 4 cm-t!



b) Hány cm-es a rajzodon a szálloda magassága?

c) Milyen magas lehet a Gyöngyszálló?

3. Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalvektora az **u**, AD oldalvektora a **v**. Nagyítsd ezt a paralelogrammát az A pontból, a nagyítási arány legyen 3!



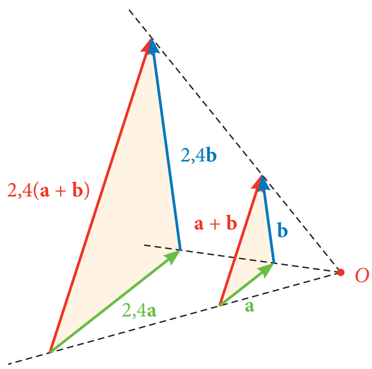
a) Hol látszik a rajzodon a 3**u** vektor, és hol a 3**v** vektor?

b) Olvasd le a rajzodról, hogy 3**u** + 3**v** = 3(**u** + **v**)!

c) Olvasd le a rajzodról, hogy 3**u** – 3**v** = 3(**u** – **v**)!

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Igazoljuk, hogy 2,4(**a** + **b**) = 2,4**a** + 2,4**b**!



Megoldás

A 2,4 arányszámú középpontos nagyítás az **a** vektort a 2,4**a** vektorba, a **b** vektort a 2,4**b** vektorba, az **a** + **b** összegvektort a 2,4(**a** + **b**) vektorba viszi.

A rajzról leolvashatjuk, hogy a 2,4**a** és a 2,4**b** összege éppen a 2,4(**a** + **b**) vektorral egyenlő, tehát valóban igaz, hogy 2,4(**a** + **b**) = 2,4**a** + 2,4**b**.

Válasszunk a 2,4 helyett egy másik pozitív számot, de ne az 1-et. Jelöljük ezt a pozitív számot k-val. Most ugyanígy bizonyítható, hogy k(**a** + **b**) = k**a** + k**b**.

Sőt ez az összefüggés minden valós szám (k) és bármely két vektor (**a**, **b**) esetében fennáll, csak esetleg másképp kell bebizonyítani.

FELADAT

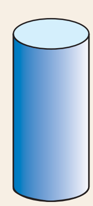
4 Írd fel egyszerűbb alakban!

a) 2(**i** + **j**) + 3**i** + 7(**i** + **j**) – 9**j**

b) 3(**a** – **b**) + 2(**a** – **b**) – 5(**a** – **b**)

HÁZI FELADAT

1 Egy henger alakú csipszesdoboz 8 cm széles és 24 cm magas. Hányszor annyi csipsz fér bele, ha



a) a szélességét a kétszeresére változtatjuk, a magasságát meghagyjuk;

b) a szélességét meghagyjuk, a magasságát a kétszeresére változtatjuk;

c) a szélességét is és a magasságát is a kétszeresére változtatjuk?

2 Milyen magas a Kristályszálló, ha 12 méter távolságból és 1,6 méter szemmagasságból

a) 45°-os; **b)** 60°-os; **c)** 65°-os

emelkedési szögben látjuk a vízszinteshez képest a szálloda tetejét?

3 Hány 0,1 cm átmérőjű ólomsörét önthető egy 2 cm átmérőjű ólomgömbből?

4 Ⓚ Egy ötvös 120 darab, 12 mm átmérőjű ezüstgolyót visszaküld az öntödébe, hogy öntsenek belőle egyetlen nagy golyót.

a) Belefért-e a 120 golyó egy 6 cm-es élű kocka alakú fémdobozba?

b) Belefér-e a nagy golyó egy ugyanekkora dobozba?

c) Kati nem szeret sokat számolni, inkább okoskodik. Ezért a feladat a) és b) részét 120 golyó helyett 125-re vonatkozóan oldja meg (fejben!), s ebből az eredményből következtet az eredetire. Vajon hogyan gondolkozott?

5 Egy üzletben 25,5 cm átmérőjű földgömböt árulnak.

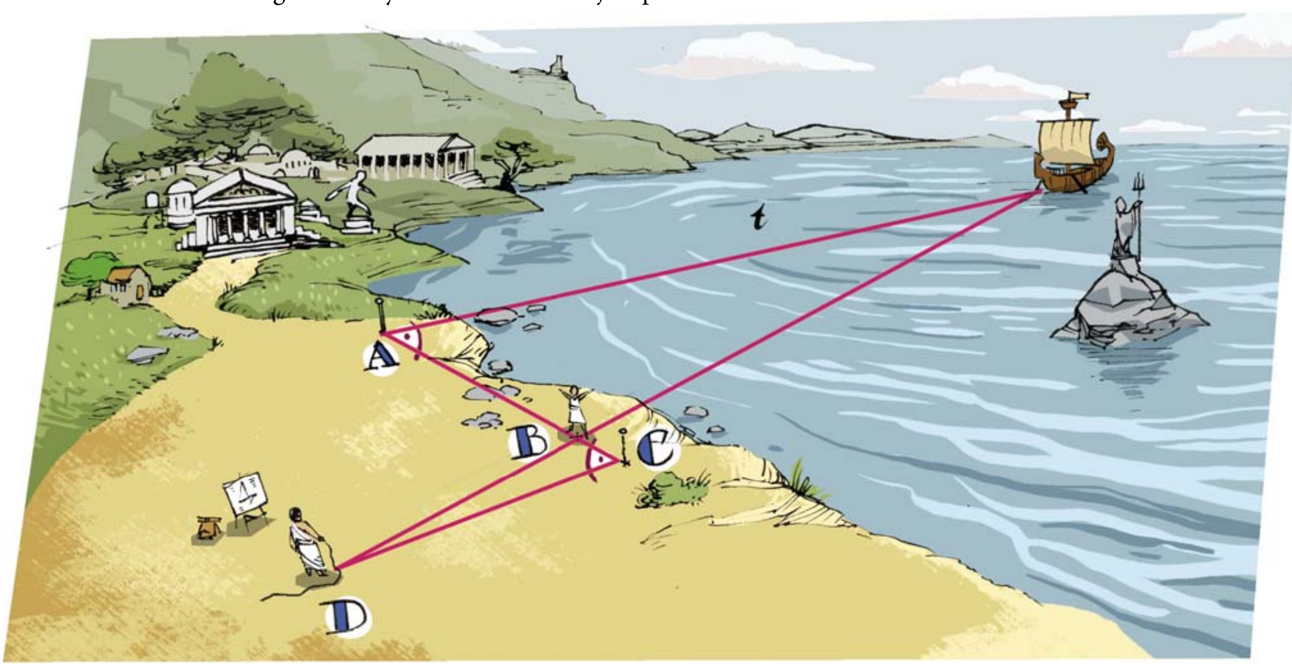
a) Milyen méretarányú lehet a földgömbön látható világtérkép? (A Föld sugarát vedd 6375 km-nek.)

b) Mekkora területű ezen a földgömbön Magyarország?

RÁADÁS

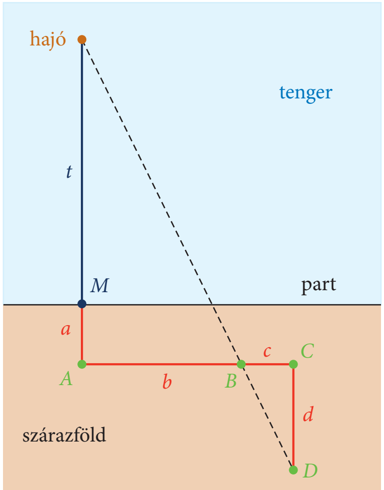
Thalész és a hasonlóságok

1. Ⓚ Thalész, az ókori hét bölcs egyike ismert egy módszert az ellenséges hajók távolságának meghatározására. Egy régi jegyzetben találunk is a mérés leírására szolgáló feljegyzéseket, de a szöveget nem értjük, legfeljebb egy-két szót. Az alábbi rajzot viszont sikerült rekonstruálni.
Fogalmazd meg egész mondatokban, hogyan lehet meghatározni a hajó távolságát! Hogyan mérnéd ki Thalész helyében ezeket a távolságokat? Milyen messze van a hajó a parttól?



Megoldás

Az ábrán látható t távolságot kell meghatároznunk. Mivel a partvonalak nem mindig járhatóak, Thalésznek az ábra A pontjából indulva kellett mérnie, az a szakasz hossza azonban egyszerű méréssel, vagy akár becsléssel meghatározható. A partvonallal párhuzamosan haladva elsétált az ábra B pontjáig, ahová beállította egy segédjét. Az $AB = b$ szakasz hossza egyszerű módon (lépésekkel) mérhető volt. Ezután továbbsétált a C pontig, lemérve a c szakaszt. Ügyelt arra, hogy ez a szakasz a b-nél jóval rövidebb legyen, hiszen nyilvánvalóan nem akart akkora távolságot sétálva megtenni, mint amilyen messze van a hajó. Ezután a partra merőlegesen elindult befelé, közben rápillantva a hajóra is. Egészen addig sétált (D), amíg azt nem látta, hogy a hajó és a segédje a B pontban egy vonalban vannak. A $CD = d$ szakasz hossza is könnyen mérhető volt.



Az ábrán látható $ABH_\Delta \sim CBD_\Delta$. A megfelelő szakaszok aránya:

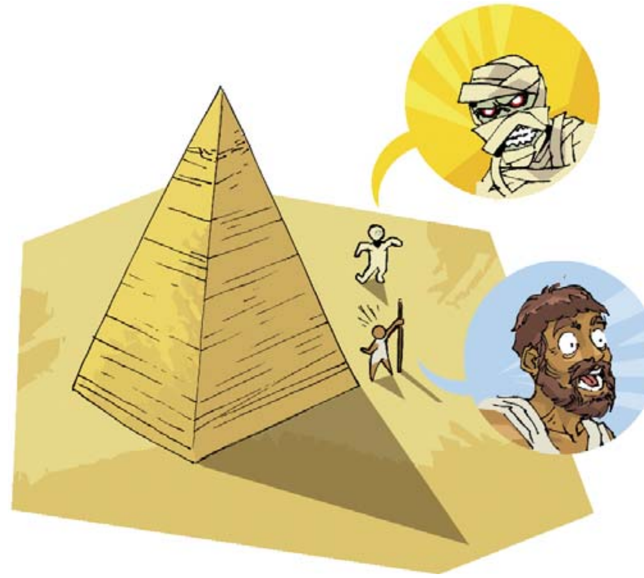
$\frac{t+a}{b} = \frac{d}{c}$, ebből t meghatározható: $t + a = \frac{d \cdot b}{c}$, tehát: $t = \frac{d \cdot b}{c} - a$.

2. Ⓚ A hasonlóság mely alapesete szerint igaz, hogy $ABH_\Delta \sim CBD_\Delta$? A szöveg alapján fogalmazd meg, hogy melyek voltak a mérésnek azon kritikus pontjai, amelyek ezt a hasonlóságot biztosították!

3. Ⓚ Osztálytársaiddal próbáljátok ki Thalész módszerét egy utca hosszának vagy egy távoli templomtorony távolságának meghatározására! Ellenőrizzétek a méréseteket a Google Maps segítségével! Méréseteket házi dolgozatként vagy projektként is elkészíthetitek.

4. Ⓚ Thalész korában a görög matematikusoknak még nem álltak ugyanazon algebra eszközei a rendelkezésükre, mint nekünk. A szorzatokat területként fogták fel, az osztás pedig arány volt. Vajon hogyan határozhatták meg a $\frac{d \cdot b}{c} - a$ kifejezés értékét?

5. Ⓚ Plutarkhosz a *Párhuzamos életrajzok*ban arról ír, hogy Thalész a gízai piramisok magasságának meghatározására is ismert egy módszert. Az ábra alapján ismertesd Thalész módszerét! Használd a módszert egy villanyoszlop vagy egy magas ház magasságának meghatározására, és próbáld meg a magasságot más módon is meghatározni!



Ki a legerősebb?

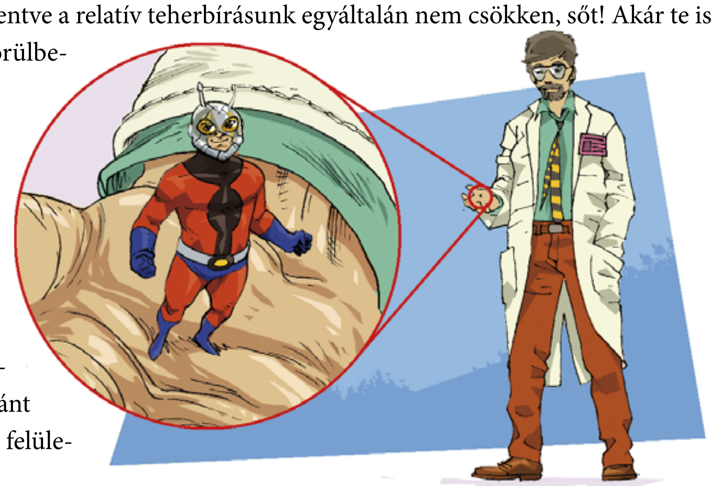
Bizonyára te is hallottál már arról, hogy a hangya a legerősebb állat a világon, hiszen egyes levélvágó hangyafélék saját testtömegüknek akár 40-50-szeresét is elbírják. A mi legjobb súlyemelőink is legfeljebb saját testtömegük körülbelül kétszeresét képesek kinyomni, egy átlagember pedig legfeljebb az egyszeresét. Tényleg ennyire esetlenek lennénk a hangyákhoz képest? Valóban pusztán annyi a szerencsénk, hogy a hangyák jóval kisebbek nálunk?

Egy leegyszerűsített modellben szemléltetve a kérdést, azt a választ kapjuk, hogy amennyiben az embert hangyaméretűre kicsinyítenénk le, jóval erősebb lenne a hangyánál. A hangyák kb. 1,5 cm-es magassága mintegy 120-ad része az ember magasságának. Ha az ember magasságát 120-ad részére csökkentjük, a térfogata $\frac{1}{120^3}$-szorosára csökken, ezáltal pedig a tömege is hasonló mértékben csökken.

Ha nagyon egyszerűen modellezzük az ember teherbírását, akkor azt feltételezzük, hogy az az izomrostok vastagságával (keresztmetszetével) arányos. Ez a keresztmetszet is csökken, ha az embert összezsugorítjuk, de „csupán” $\frac{1}{120^2}$-szeresére, hiszen a felületek a hasonlóság arányának négyzetével változnak.

Ha a két változást összehasonlítjuk, azt tapasztaljuk, hogy az embert lecsökkentve a relatív teherbírásunk egyáltalán nem csökken, sőt! Akár te is kényelmesen ki tudnád nyomni saját testtömegednek körülbelül 120-szorosát!

Ezzel a feladattal és még sok más, a hasonlósággal kapcsolatos érdekességgel is találkozhatsz Horváth Gábor, Juhász András és Tasnádi Péter *Mindennapok fizikája* című könyvében. Olvasd el az *Arányos aránytalanságok a mesében és az élővilágban* című fejezetet! Ebből megtudhatod, hogy a liliputi törpékkel milyen nehéz szót érteni, hogy mennyi élelemre van szüksége egy felnőtt óriásnak és azt is, hogy hányszor dobban egy elefánt szíve az életében – mindezt csupán a hasonló alakzatok felületére és térfogatára vonatkozó ismeretekből levezetve.



58 HÁROMSZÖGEK HASONLÓSÁGA

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Egy háromszög két oldala: $a = 3{,}4$ cm, $b = 5{,}2$ cm, az általuk közbezárt szög: $\gamma = 68{,}4°$. Ezt a háromszöget középpontosan nagyítjuk a 2,5-szeresére, majd a nagyított képet tükrözzük egy egyenesre. Hasonlítsuk össze a tükrözés után kapott háromszöget az eredetivel!

Megoldás

A középpontos nagyítás során kapott háromszög oldalai és szögei nem változnak az egyenesre való tükrözéssel, csak a körüljárási iránya változik meg. Tehát a tükrözés után kapott háromszög oldalainak hossza 2,5-szer akkora, mint az eredeti háromszög oldalaié, a szögei pedig ugyanakkorák, mint az eredeti háromszög szögei. Az eredeti és a tükrözés után kapott háromszög **hasonló**, a hasonlóságuk arányszáma 2,5.

Tehát $a' = 2{,}5 \cdot 3{,}4 = 8{,}5$ (cm), $b' = 2{,}5 \cdot 5{,}2 = 13$ (cm), $c' = 2{,}5 \cdot c$ (cm), $\gamma' = \gamma = 68{,}4°$, $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$.

2. Az ABC háromszög két oldala $a = 3{,}4$ cm, $b = 5{,}2$ cm, az általuk közbezárt szög: $\gamma = 68{,}4°$, a PQR háromszög két oldala $p = 17$ cm, $q = 26$ cm, az általuk közbezárt szög $\varphi = 68{,}4°$. Igaz-e, hogy $ABC\triangle \sim PQR\triangle$?

Megoldás

$\frac{p}{a} = \frac{17}{3{,}4} = 5$, $\frac{q}{b} = \frac{26}{5{,}2} = 5$ és $\varphi = \gamma$. Ha tehát az ABC háromszöget például az A csúcsából az 5-szörösére nagyítjuk, akkor olyan $A'B'C'$ háromszöghöz jutunk, amely két oldalában és az ezek által közbezárt szögében megegyezik a PQR háromszöggel. Így a két háromszög egybevágó: $PQR\triangle \cong A'B'C'\triangle$. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy az eredeti ABC háromszög és a PQR háromszög hasonló: $ABC\triangle \sim PQR\triangle$ (a hasonlóságuk arányszáma 5).

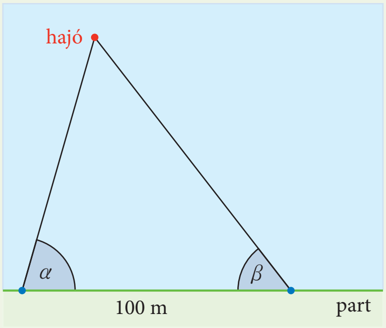
FELADAT

1 Egy hajó bent áll a tengeren. Három osztálytárs ki akarja számítani, hány méterre van a parttól. Kimérnek a parton egy 100 méteres szakaszt, mindhárman megmérik az α és a β szöget:

	Bence	Dönci	Jocó
α	72°	73°	77°
β	53°	51°	52°

a) Az átlagokat választják. Mekkora szögekkel számolnak?

b) Megrajzolják a háromszöget kicsinyítve. A 100 méter helyett 10 cm-t vesznek, a két végponthoz felmérik α-t és β-t. Természetesnek veszik, hogy ez a kis háromszög hasonló a valóságoshoz. Készítsd el te is ezt a rajzot!



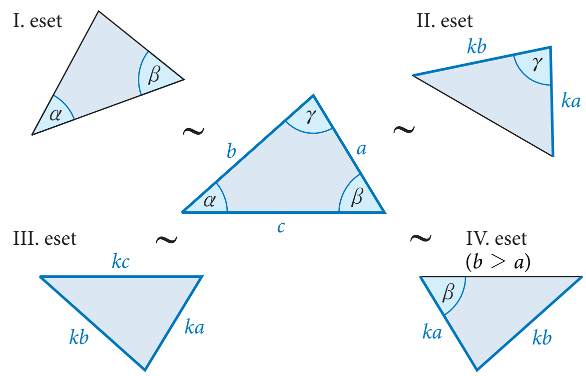
c) Mekkora a kicsinyítésben a hajó és a part távolsága? Mérd meg!

d) Mekkora lehet a hajó és a part távolsága a valóságban?

e) Rajzold meg a kicsinyített háromszöget külön-külön a három fiú adataival!
Milyen eltérés van a d) kérdésre adott válaszban?

ELMÉLET

Sok feladat megoldását elősegíti a következő négy *elégséges feltétel*, amelyeket a *háromszögek hasonlósági alapeseteinek* nevezünk. (Az ábra azt mutatja meg, hogy a középső háromszög oldalai, illetve szögei milyen kapcsolatban vannak a körülötte álló háromszögek egyes alkotórészeivel.)

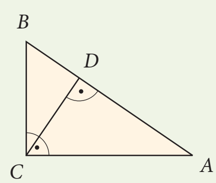


Ha két háromszögben
- két-két szög egyenlő, akkor ez a két háromszög hasonló (I. eset);
- két-két oldal aránya és az általuk közbezárt szög egyenlő, akkor ez a két háromszög hasonló (II. eset),
- a három oldal aránya páronként egyenlő, akkor ez a két háromszög hasonló (III. eset),
- két-két oldal aránya és a nagyobbikkal szemben fekvő szög egyenlő, akkor ez a két háromszög hasonló (IV. eset).

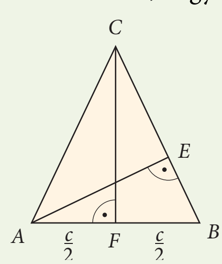
FELADAT

2 Keress az ábrán hasonló háromszögeket! Indokold is, hogy miért hasonlók!

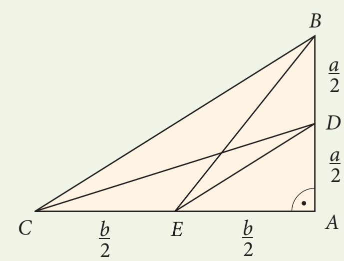
a)



b)



c)

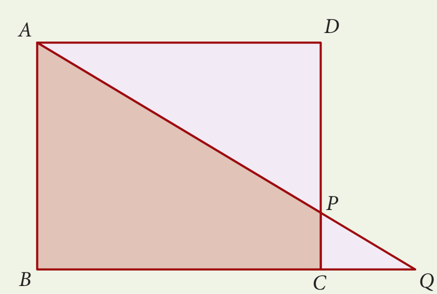


3 Az $ABCD$ téglalapban a P pont a CD oldal C-hez közelebbi negyedelőpontja. Az AB oldal hossza 8 cm, a BC oldal hossza 10 cm.

a) Keress az ábrán hasonló háromszögeket! Indokold, miért hasonlóak, a hasonlóság melyik alapesete teljesül?

b) Mekkora a CP, és mekkora a PD távolság?

c) Mekkora a QC távolság?



HÁZI FELADAT

1 Hány méterre van a parttól a tengerben az a hajó, amelynél az 1. feladat jelölései szerint

a) $\alpha = 60°$ és $\beta = 45°$;

b) $\alpha = 60°$ és $\beta = 90°$;

c) $\alpha = 50°$ és $\beta = 110°$?

2 A táblázat négy háromszög oldalhosszúságait mutatja.

a) Vannak-e itt hasonló háromszögek? Ha igen, melyek azok?

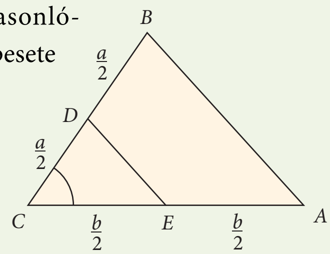
b) A háromszögek hasonlóságának melyik esetét használtad?

	Oldalak hosszúsága		
I. háromszög	30 mm	42 mm	42 mm
II. háromszög	35 cm	35 cm	42 cm
III. háromszög	5,6 dm	4 dm	56 cm
IV. háromszög	40 dm	56 dm	56 dm

59 HÁROMSZÖG KÖZÉPVONALAI ÉS SÚLYVONALAI

FELADAT

1 A háromszögek hasonlóságának egyik alapesete megmutatja, hogy $ABC\triangle \sim EDC\triangle$.



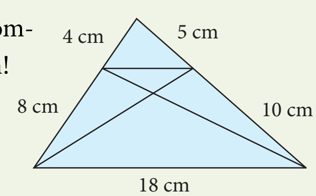
a) Melyik ez az alapeset?
b) Melyek itt az egymásnak megfelelő csúcsok?
c) Mennyi a hasonlóság arányszáma?
d) Mi következik ebből az AB és a DE szakasz állására és hosszúságára vonatkozóan?
e) A DE szakasz az $ABC\triangle$ két oldalának a felezőpontját köti össze. Mi a neve az ilyen tulajdonságú szakasznak?

ELMÉLET

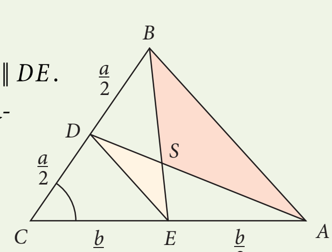
A 9. osztályban már megfigyeltük:
ha összekötjük egy háromszög két oldalának a felezőpontját, akkor a háromszög egyik **középvonalát** kapjuk meg. Bizonyítható, hogy ez a középvonal párhuzamos a háromszög harmadik oldalával, és feleolyan hosszú, mint ez az oldal. Minden háromszögnek három középvonala van.

FELADAT

2 Keress hasonló háromszögeket az ábrán! Indokold, hogy miért hasonlók, és állapítsd meg a hasonlóságuk arányát is!

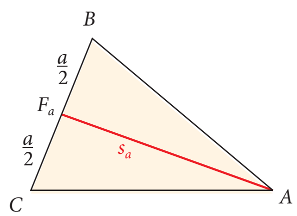


3 Tudjuk, hogy $AB \parallel DE$. A háromszögek hasonlóságának egyik alapesete megmutatja, hogy $ABS\triangle \sim DES\triangle$.



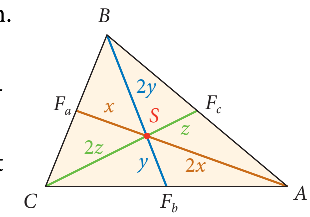
a) Melyik ez az alapeset?
b) Melyek itt az egymásnak megfelelő csúcsok?
c) Mennyi a hasonlóság arányszáma?
d) Mennyi az AS és a DS szakasz hosszúságának az aránya?
e) És a BS meg az ES szakasz hosszúságának az aránya?
f) Az AD szakasz is és a BE szakasz is az $ABC\triangle$ egyik csúcsát és a vele szemközti oldal felezőpontját köti össze. Mi a neve az ilyen tulajdonságú szakasznak?

ELMÉLET



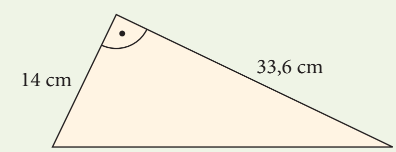
A 9. osztályban már megfigyeltük:
ha összekötjük egy háromszög egyik csúcsát a vele szemközti oldal felezőpontjával, akkor a háromszög egyik **súlyvonalát** kapjuk meg (az ábrán az A csúcshoz tartozó súlyvonalat rajzoltuk meg). Minden háromszögnek három súlyvonala van.
Igaz a következő két állítás:

– **Két súlyvonal 2 : 1 arányban osztja egymást, a hosszabbik rész csatlakozik a csúcshoz.**
– **Egy háromszög három súlyvonala egy pontban metszi egymást. Ezt a közös pontot a háromszög *súlypontjának* nevezzük.**



FELADAT

4 Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 14 cm és 33,6 cm.
a) Mekkorák a háromszög középvonalai?
b) Mekkora az átfogóhoz tartozó súlyvonal hossza?
c) Mekkora a befogókhoz tartozó súlyvonalak hossza?
d) Mekkora távolságra van a háromszög súlypontja a háromszög csúcsaitól?

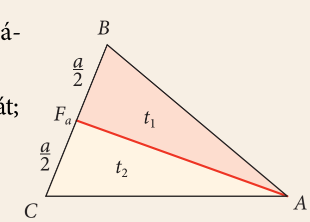


HÁZI FELADAT

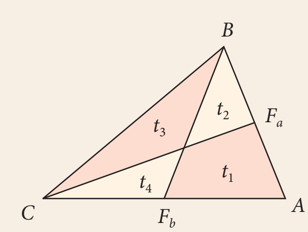
1 **a)** Mekkora távolságra van a 3,8 cm oldalú szabályos háromszög súlypontja a háromszög csúcsaitól?
b) Mekkora távolságra van a 4,5 cm befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög súlypontja a háromszög oldalaitól?

2 Egy egyenlő szárú háromszög alapja 42 mm, szára 29 mm hosszú.
a) Milyen hosszúak a háromszög középvonalai?
b) Mekkora távolságra van a háromszög súlypontja az alaptól?
c) A súlypontot összekötjük a háromszög csúcsaival. Mekkora területű háromszögekre bontottuk fel az eredeti háromszöget?
d) Megrajzoljuk a háromszög három középvonalát. Mekkora a középvonalak által meghatározott háromszög területe?

3 Rajzold meg egy háromszögnek
a) az egyik súlyvonalát;



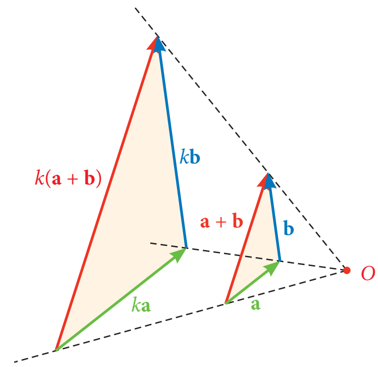
b) két súlyvonalát!



Mi lesz az egyes részek területének az aránya?

4 Egy háromszög egyik súlyvonala 6 cm, egy másik 4,5 cm hosszú. Ez a két súlyvonal merőleges egymásra.
a) Mekkorák ennek a háromszögnek az oldalai?
b) Mekkorák ennek a háromszögnek a középvonalai?

I. Bizonyítsuk be, hogy a számmal való szorzás disztributív a vektorösszeadásra nézve! Vagyis ha $k \in \mathbf{R}$, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ pedig tetszőleges vektor, akkor $k(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$.



Bizonyítás

– Ha $k = 0$, akkor mindkét oldalon $\mathbf{0}$ áll, ezért igaz az állítás.
– Ha $k = 1$, akkor az állítás szerint $\mathbf{a}+\mathbf{b} = 1\mathbf{a} + 1\mathbf{b}$, ami nyilván igaz.
– Ha $k > 0$, de $k \neq 1$, akkor tekintsük a mellékelt ábrát!

A k arányszámú középpontos nagyítás az $\mathbf{a}$-t a $k\mathbf{a}$-ba, a $\mathbf{b}$-t a $k\mathbf{b}$-ba, az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ összegvektort a $k(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ vektorba viszi.
Az ábra szerint a $k\mathbf{a}$ és $k\mathbf{b}$ összege éppen ezzel a $k(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ vektorral egyenlő, tehát valóban igaz, hogy $k(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$.

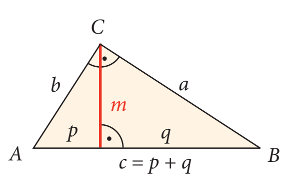
– Ha $k < 0$, akkor hasonlóan bizonyítható az állítás. A nagyítás arányszáma $|k|$, a $k\mathbf{a}$, $k\mathbf{b}$, $k(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ rendre ellentétes irányúak az $\mathbf{a}$, a $\mathbf{b}$, illetve az $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ vektorral.

Megjegyzés

– A bizonyításban nem használtuk ki, hogy az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ állása milyen, ezért egyállású $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ esetén is érvényes.
– Beláttuk, hogy a számmal való szorzás *disztributív* a vektorösszeadásra nézve.
– Mivel $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$, ezért $k(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = k\mathbf{a} - k\mathbf{b}$ is minden esetben igaz.

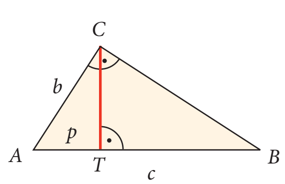
II. A Pitagorasz-tétel felhasználásával már igazoltuk a derékszögű háromszögekre vonatkozó *magasságtételt* és *befogótételt*. Ezeket a tételeket a hasonló háromszögek tulajdonságai segítségével is bebizonyíthatjuk:

1. állítás (magasságtétel)
A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogó két szeletének mértani közepe.



Bizonyítás
Használjuk az ábra jelöléseit! A magasság két hasonló háromszögre bontja az ABC derékszögű háromszöget (hegyesszögeik páronként egyenlők, mert merőleges szárúak). Ezért e háromszögekben egyenlő a megfelelő befogók aránya:
$p : m = m : q$, amiből $m^2 = pq$.
Tehát az adott állítás igaz.

2. állítás (befogótétel)
A derékszögű háromszög befogója mértani közepe az átfogónak és a befogó átfogóra eső merőleges vetületének.



Bizonyítás
Használjuk az ábra jelöléseit! Az ABC és az ACT derékszögű háromszögek hasonlók (egyik hegyesszögük közös és van derékszögük), ezért a megfelelő oldalaik aránya egyenlő.
$p : b = b : c$, amiből $b^2 = pc$, vagyis igaz az adott állítás.

FELADAT

A számegyenesen adott az $a > 0$ valós szám helye. Szerkesszük meg

a) a $\sqrt{a}$;   **b)** az a^2

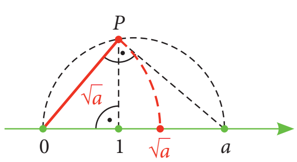
valós szám helyét! ($a \neq 1$)

Megoldás

a) A szerkesztés például a *befogótétel* segítségével is elvégezhető.

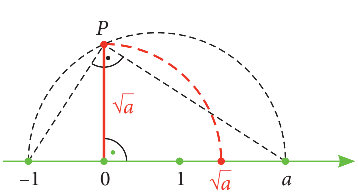
Legyen $a > 1$, és jelöljük a megszerkesztendő szakaszhosszt x-szel: $x = \sqrt{a} = \sqrt{1 \cdot a}$.

A megszerkesztendő szakaszhossz az 1 és az a mértani közepe. Ha tehát olyan derékszögű háromszöget szerkesztünk, amelynek átfogója a és az egyik befogónak az átfogóra eső merőleges vetülete 1, akkor ez a befogó éppen $\sqrt{a}$ hosszúságú. (Ha $0 < a < 1$, akkor 1 átfogójú derékszögű háromszöget szerkesztünk.) A szerkesztés az ábra alapján követhető.



Megjegyzés

A *magasságtétel* segítségével is szerkeszthetünk. A szerkesztés menete az ábráról leolvasható.

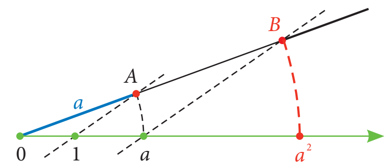


Első lépésben itt $(a + 1)$ átmérőjű kört szerkesztünk, majd a számegyenes 0 pontjában merőlegest állítunk a számegyenesre. Ez kimetszi a megfelelő derékszögű háromszög derékszögű csúcsát a körből.

Mindkét szerkesztésben felhasználtuk a Thalész-tételt.

Ezzel az eljárással szerkesztettük a 16. leckében a számegyenesen egy egész szám négyzetgyökének helyét.

b) A szerkesztést most olyan, a arányszámú középpontos nagyítással végezzük, amelynek középpontja a számegyenes 0 pontja. Ez a nagyítás a számegyenes a jelű pontját a számegyenes a^2 jelű pontjába viszi át.



Az ábrán követhető a szerkesztés menete:

– a számegyenes 0 pontja legyen egy szög csúcsa, a szög egyik szára pedig illeszkedjen a számegyenes pozitív felére;
– mérjünk fel a szög másik szárára a 0 pontból kiindulva egy a hosszúságú szakaszt, a végpontja legyen A;
– a számegyenes a jelű pontján keresztül párhuzamost szerkesztünk az „$1A$” egyenessel; ez a másik szögszárat B-ben metszi;
– az a arányszámú középpontos hasonlóság a számegyenesen az 1 jelű pontot az a jelű pontba viszi át, ezért az „$0B$” szakasz hossza éppen a megszerkesztendő a^2-nel egyenlő;
– a számegyenes 0 pontja körül a^2 sugarú kört írva a számegyenesből kimetsszük az a^2 valós szám helyét.

Megjegyzés

A szerkesztésből könnyen leolvasható, hogy ha $a > 1$, akkor $a^2 > a$, ha $0 < a < 1$, akkor $a > a^2$.

Megjegyzések

– Az $x \mapsto \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ függvény grafikonjának pontjai $P(a; \sqrt{a})$ alakban adhatók meg, az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonjának pontjai pedig $Q(a; a^2)$ alakban. A feladat megoldásából tehát az is látható, hogy e két függvény grafikonjának tetszőlegesen sok, véges számú pontja csupán körző és vonalzó használatával is megszerkeszthető.
– A b) feladat megoldására az a)-ban leírt szerkesztést is alkalmazhatjuk „visszafelé” lépegetéssel: a szám négyzetgyökéből (az a-ból) megszerkeszthetjük magát a számot (az a^2-et).

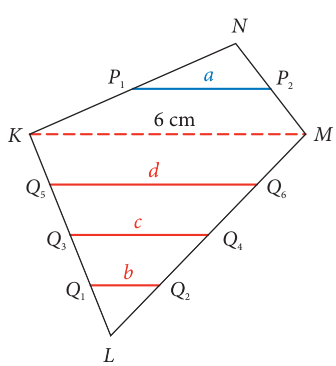
60 GYAKORLÁS

CSOPORTMUNKA

2-3 fős csoportokba osztva dolgozzatok! Ugyanannyi csoport foglalkozzon az I. feladatsorozattal, mint a II. feladatsorozattal. A feladatsorozatok megoldása után mindegyik csoport „megtanítja” a saját feladatait egy másik csoportnak, amely nem ugyanazt a feladatsorozatot oldotta meg.

I. FELADATSOROZAT

1 A *KLMN* négyszög két oldalát megfeleztük, két oldalát pedig 4-4 egyenlő részre osztottuk. Két-két osztópontot az ábra szerint összekötöttünk. Megrajzoltuk a *KM* átlót is, amely 6 cm hosszú.

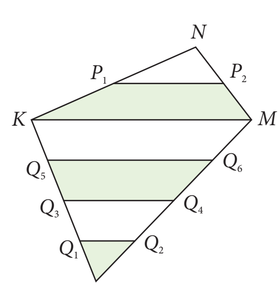


a) Miért párhuzamosak az *a*, *b*, *c*, *d* szakaszok a *KM* átlóval?

b) Számítsd ki az *a*, *b*, *c*, *d* szakaszok hosszát!

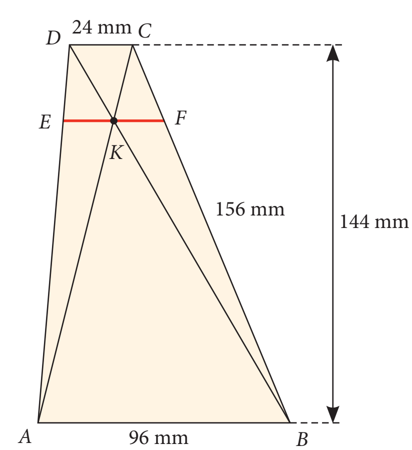
c) Hány olyan trapéz rajzolható az ábrába, amelynek a két alapja az *a*, *b*, *c*, *d* szakaszok közül kerül ki? Ezek között hány paralelogramma van?

2 A *KMN* háromszög területe 6 cm^2, a *KML* háromszög területe 12 cm^2. Számítsd ki a színezett sokszögek területét! ($KM = 6$ cm)



II. FELADATSOROZAT

1 Az *ABCD* trapéz alapjainak hossza 24 mm és 96 mm, *BC* szára 156 mm-es, magassága 144 mm. Az *EF* szakasz párhuzamos a trapéz alapjaival, és az átlók *K* metszéspontja a szakaszon van.



a) A hasonlóság melyik alapesetével igazolhatjuk, hogy $ABK\triangle \sim CDK\triangle$?

b) Melyek itt a megfelelő oldalak? Miért?

c) Mennyi a hasonlóság arányszáma?

d) Hányszor akkora az *AK* szakasz, mint a *KC* szakasz?

e) A hasonlóság melyik alapesetével igazolhatjuk, hogy $AKE\triangle \sim ACD\triangle$?

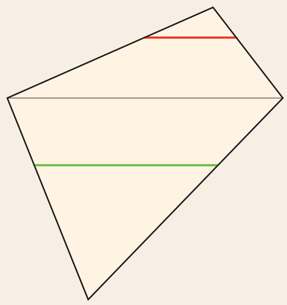
f) Mennyi a hasonlóság arányszáma?

g) Hány mm-es az *EK* szakasz?

2 Igazold, hogy a *KF* szakasz ugyanakkora, mint az *EK* szakasz!

HÁZI FELADAT

1 Az ábrán a négyszög két-két szomszédos oldalának harmadolópontjait kötöttük össze.

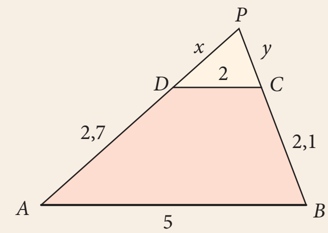


a) Hányszor akkora a fekete átló, mint a piros szakasz?

b) Hányszor akkora a fekete átló, mint a zöld szakasz?

c) Mennyi a piros és a zöld szakasz hosszúságának az aránya?

2 Az *ABCD* trapéz kiegészítő háromszöge a *DCP* háromszög.

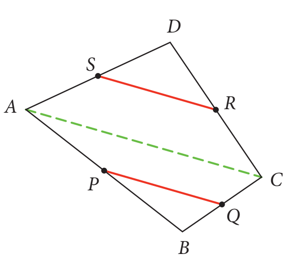


a) Mekkora x és y?

b) Hányadrésze a kiegészítő háromszög területe az *ABP* háromszög területének, illetve a trapéz területének?

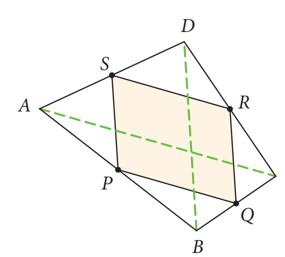
RÁADÁS

Könnyen igazolhatjuk, hogy *bármely négyszögben a négy oldalfelező pont egy paralelogrammát határoz meg.*



A *PQ* szakasz középvonal az *ABC* háromszögben, ezért *PQ* párhuzamos az *AC* szakasszal, és feleolyan hosszú, mint az *AC*. Az *SR* szakasz középvonal az *ACD* háromszögben, ezért párhuzamos az *AC* szakasszal, és feleolyan hosszú, mint az *AC*. Így a *PQ* és *SR* szakaszok egymással párhuzamosak és egyenlő hosszúak. Emiatt például a *PR* szakasz felezőpontjára tükrözve a *PQRS* négyszög önmagába megy át, vagyis középpontosan szimmetrikus. A *PQRS* négyszög tehát paralelogramma.

Megjegyzés

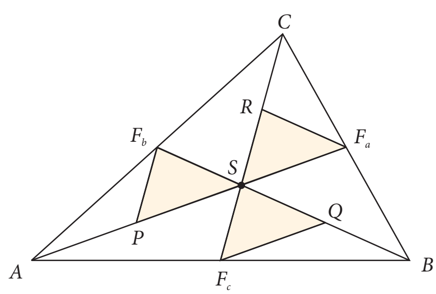


– Az oldalfelező pontok által meghatározott paralelogramma oldalai a négyszög átlóival párhuzamosak (lásd ábra), és feleakkorák, mint az átlók. Ezért igazak a következők:
  – Ha egy négyszög átlói merőlegesek, akkor a négyszög oldalfelező pontjai egy téglalapot határoznak meg.
  – Ha egy négyszög átlói egyenlő hosszúak, akkor a négyszög oldalfelező pontjai egy rombuszt határoznak meg.
– A fent bizonyított tétel úgy is kimondható, hogy a négyszög két-két szemközti oldalának felezőpontját összekötő két szakasz kölcsönösen felezi egymást.
– A síknégyszög oldalfelező pontjai által meghatározott paralelogramma területe a négyszög területének pontosan a fele.

61 HASONLÓ SÍKIDOMOK ÉS TESTEK

I. FELADATSOROZAT

1 Az ABC háromszög súlypontja S; az AS, BS, CS szakaszok felezőpontja rendre P, Q, illetve R. Az A, B, C csúcsokhoz tartozó súlyvonalak hossza rendre 15 cm, 18 cm, illetve 12 cm.



a) Mekkorák a színezett háromszögek oldalai?

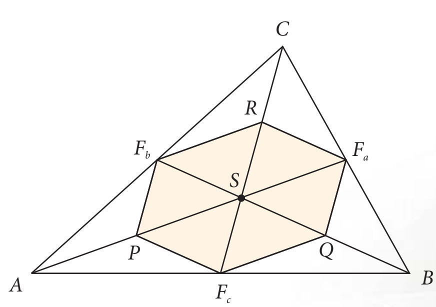
b) Hogyan látnád be, hogy a 3 színezett háromszög egybevágó?

c) Az ábrán látható háromszögek közül például az ASC háromszög hasonló az F_bRC háromszöghöz. Hogyan indokolnád ezt? Mennyi a hasonlóságuk arányszáma?

d) Keress még hasonló háromszögpárokat az ábrán!

e) Igaz-e, hogy az $ASF_c\triangle \sim CSF_b\triangle$? Válaszodat indokold!

2 Az előző feladatot folytatjuk.



a) Mekkorák a színezett hatszög oldalai?

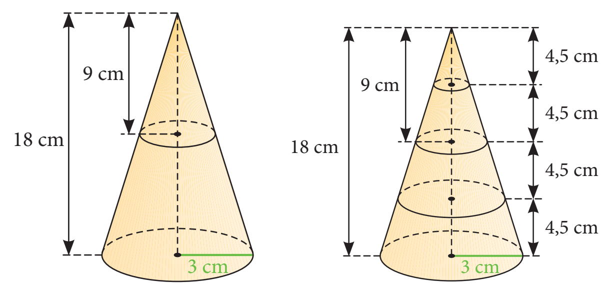
b) Igazold, hogy a hatszög egymással szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlő hosszúak!

c) Igaz-e, hogy a hatszög középpontosan szimmetrikus?

d) Az ABC háromszög területének hányadrészét fedi le a hatszög?

II. FELADATSOROZAT

1 Egy tölcséres jégkrémet a magasságának felénél kettévágtunk.



a) Számítsd ki a keletkezett két jégkrémdarab térfogatát! (A kúp térfogatát a $\frac{T_{alap} \cdot m}{3}$ képlettel is kiszámíthatjuk.)

b) A kis kúp térfogatának hányszorosa az eredeti kúp térfogata?

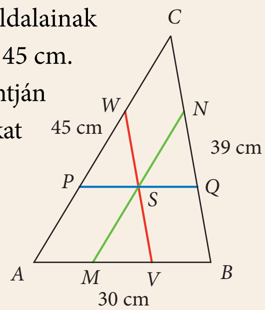
c) Hányszorosa a keletkező csonkakúp alakú rész térfogata a kis kúp térfogatának?

d) Mindkét keletkező részt ismét kettévágtuk a magasságuk felénél. Így egy kis kúp és három csonkakúp alakú rész keletkezett. Mekkora az egyes részek térfogata?

2 Egy vágással szeretnénk igazságosan kettéosztani a tölcséres jégkrémet, de „hosszában” nem tudjuk elvágni, mert a jégkrém így széttörne. Ezért „keresztben” (a forgástengelyére merőlegesen) vágjuk ketté. Hol vágjuk ketté, hogy a két rész térfogata egyenlő legyen!

HÁZI FELADAT

1 Az ABC háromszög oldalainak hossza 30 cm, 39 cm és 45 cm. A háromszög S súlypontján keresztül párhuzamosokat húztunk a háromszög oldalaival.



a) Mekkora a párhuzamosoknak a háromszöghöz tartozó szakasza (MN, PQ, VW)?

b) Miért igaz, hogy S felezi az MN, PQ, VW szakaszok mindegyikét?

c) Igazold, hogy az MSV háromszög hasonló az ABC háromszöghöz! Mekkora a hasonlóságuk arányszáma?

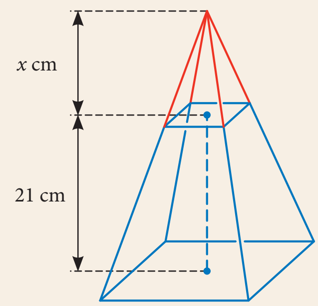
d) Keress az ábrán két-két olyan hasonló háromszöget, amelyek hasonlóságának arányszáma 3, 2, $\frac{3}{2}$, illetve 1!

e) Vannak-e hasonlók az ábrán látható paralelogrammák között? Válaszodat indokold!

f) Az $AVSP$ trapéz és az $ABQP$ trapéz szögei páronként egyenlők. Hasonló-e a két trapéz?

g) Keress egybevágó trapézokat az ábrán!

2 Egy csonkagúla alapterülete 400 cm^2, fedőlapjának a területe 64 cm^2, magassága 21 cm. A csonkagúlát kiegészítjük gúlává.



a) Mekkora annak a középpontos nagyításnak az arányszáma, amely a kiegészítő kis gúlát a teljes gúlába viszi át?

b) Számítsd ki a kiegészítő gúla magasságát!

c) Mekkora a nagy gúla és a kiegészítő kis gúla térfogatának különbsége?

d) Hányszorosa a a csonkagúla térfogata a kiegészítő gúla térfogatának?

3 Egy építész egy 280 méter magas épület 1,4 méteres modelljét tesztelte különbözõ szélerősségek mellett. Arra lett figyelmes, hogy a modell teteje valamelyest rezeg. A modell tengelye a csúcsánál 1 cm-t lengett ki a függõleges irányhoz képest. Ezek alapján mennyi lenne a tesztnek megfelelõ időjárási körülmények mellett a valódi épület kilengése? (OKM-feladat, 2003, 26. feladat)

Ráadás

SZÉPSÉG ÉS MŰVÉSZET

BEVEZETŐ

Ha a matematika és a művészet kapcsolatát vizsgáljuk, a *szimmetria* és az *arány* bizonyára az elsőként felbukkanó matematikai fogalmak között lesznek. A szimmetriáról már szóltunk. Az arányokkal összefüggésben a számtani közép(arányos) és a mértani közép(arányos) sokszor kerül elő festmények, szobrok, épületek bizonyos méreteinek elemzésekor.

Az internetes Wikipédia szerint: „A művészetben az *arány* az egyes részek méretének viszonya az egészhez… Az *arány* minden alkalommal jelentkezik, valahányszor valaminek, ami önmagában teljes egész, különböző formájú részei vannak. Erre jó példa az emberi test, vagy pedig ha több tárgy együttvéve összeillő egészet képez, mint például az épületen az oszlopok, pillérek, ívek, gerendák és a szerkezetnek a többi része.”

Legegyszerűbb, de a legtöbbet idézett esetben egy szakasz (az egész) két darabra (részre) való felosztásakor keletkező arányok képezik a vizsgálat tárgyát. A két egyenlő részre osztás (azaz 1 : 1 arányú felosztás) „hétköznapi” esetnek számít, inkább a szimmetriához tartozónak érezzük. Vannak ennél sokkal „izgalmasabb” felosztások is.

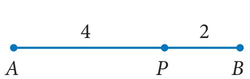
KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Osszuk fel a 6 cm hosszú szakaszt két részre úgy, hogy a kisebbik **rész** és az **egész** szakasz **számtani közepe** a nagyobbik rész legyen!

Megoldás

Ha a kisebbik rész hossza x cm, akkor a nagyobbik rész hossza $(6 - x)$ cm. Az kell, hogy $\frac{6 + x}{2} = 6 - x$ teljesüljön. Most $6 + x = 12 - 2x$, $3x = 6$, $x = 2$.

Tehát a 6 cm-es szakaszt egy 2 cm-es és egy 4 cm-es részre osztva kapjuk a kívánt felosztást.



Megjegyzés

– Ezt a felosztást tekintve elmondhatjuk, hogy amenynyivel hosszabb a nagyobbik rész a kisebbiknél, annyival hosszabb az egész szakasz a nagyobbik résznél.

– Bármely szakaszt osztunk két részre a feladatban megadott feltétellel, mindig azt kapjuk, hogy a nagyobb rész az egésznek kétharmad része (kb. 66,7%-a), a kisebbik rész az egésznek egyharmad része (kb. 33,3%-a).

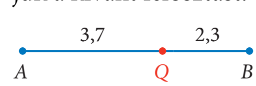
2. Osszuk fel a 6 cm hosszú szakaszt két részre úgy, hogy a kisebbik **rész** és az **egész** szakasz **mértani közepe** a nagyobbik rész legyen!

Megoldás

Ha a kisebbik rész hossza x cm, akkor a nagyobbik rész hossza $(6 - x)$ cm. Az kell tehát, hogy $6 - x = \sqrt{6 \cdot x}$ legyen.

Itt nyilván $0 < x < 6$, ezért a négyzetre emelés ekvivalens egyenlethez vezet: $x^2 - 12x + 36 = 6x$, vagyis $x^2 - 18x + 36 = 0$. Ennek az egyenletnek két valós gyöke van: $9 + 3\sqrt{5} \approx 15,7$, illetve $9 - 3\sqrt{5} \approx 2,3$.

A feladatnak csak ez utóbbi lehet megoldása, tehát a 6 cm-es szakaszt egy 2,3 cm-es és egy 3,7 cm-es részre osztva kapjuk a kívánt felosztást.



Megjegyzés

– Ezt a felosztást tekintve elmondhatjuk, hogy ahányszorosa a nagyobbik rész a kisebbik résznek, annyiszorosa az egész (szakasz) a nagyobbik résznek. Másként: *a kisebb rész úgy aránylik a nagyobbik részhez, ahogyan a nagyobbik rész az egészhez.*

– Bármely szakaszt osztunk két részre a feladatban megadott feltétellel, mindig azt kapjuk, hogy a nagyobb rész az egésznek körülbelül 0,618-szerese (61,8%-a), a kisebbik rész a nagyobbik résznek ugyancsak 0,618-szerese (61,8%-a). A kisebbik rész az egésznek körülbelül 0,382-szerese (38,2%-a).

ELMÉLET

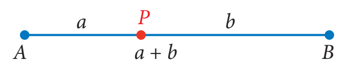
Az AB szakasznak a 2. kidolgozott feladatban bemutatott felosztási módja igen „nagy karriert futott be" a művészetben, az építészetben, ráadásul még a „valóságos világ" is kedveli az *egésznek* ezt a fajta felosztását. Egyesek annyira különlegesnek és szépnek, sőt esztétikailag tökéletesnek találták ezt a felosztási módot, hogy külön nevet is adtak neki: *aranymetszésnek (sectio aureának)* nevezték el.

Az AB szakasznak az aranymetszés szerinti felosztását kiegyensúlyozott, harmonikus részekre osztásnak érezték, és ez az érzés a mai napig sokakat kerít hatalmába.

Az aranymetszés

Az AB szakaszt a P pont az aranymetszés szerint osztja két részre, ha

$a : b = b : (a + b)$ (azaz kisebbik rész : nagyobbik rész = nagyobbik rész : egész).

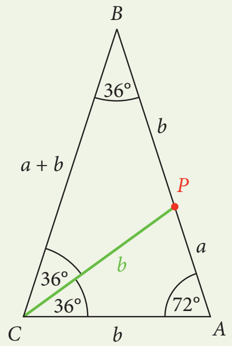


A 2. kidolgozott feladat gondolatmenetét követve egy másodfokú egyenlet megoldása megadja az aranymetszés arányszámát:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{kisebbik rész}}{\text{nagyobbik rész}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618, \text{ illetve reciprokát véve: } \frac{b}{a} = \frac{\text{nagyobbik rész}}{\text{kisebbik rész}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618.$$

FELADAT

1 **a)** Melyik „alapeset" igazolja, hogy $ABC\triangle \sim ACP\triangle$? Melyek az egymásnak megfelelő oldalak a hasonlóságnál?



b) Az $\frac{a}{b}$ arány az $APC\triangle$ alapjának és az $ABC\triangle$ alapjának aránya. Mekkora a két háromszög egy-egy szárának aránya?

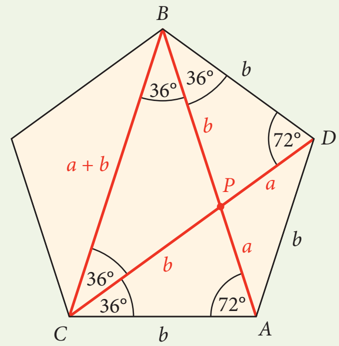
c) A b)-ben felírt két arány egyenlő. Az AB szárnak milyen felosztását adja a P pont?

2 A szabályos ötszögben megrajzoltunk három átlót.

a) Figyeld meg az ABC és az ABD háromszöget, és minél több „érdekességet" mondj el róluk, illetve kölcsönös elhelyezkedésükről!

b) Az AB és CD átlók P metszéspontja milyen arányban osztja két részre ezeket az átlókat?

c) Körülbelül hányszor akkora a szabályos ötszög egy átlója, mint egy oldala? (Figyeld meg a BCP és ADP háromszögeket is!)



3 **a)** Most vizsgálj egy 2 egységnyi oldalhosszúságú szabályos ötszöget!
Igazold, hogy az ábra szerinti jelölést használva $a = \sqrt{5} - 1$, az átló hossza pedig $\sqrt{5} + 1$!

b) Mekkorák az átlói a 3 cm, a 4 cm vagy az 5 cm oldalhosszúságú szabályos ötszögnek?

c) Mekkorák a szabályos ötszög oldalai, ha az átlói 5 cm-esek, 12 cm-esek vagy 26 cm-esek?

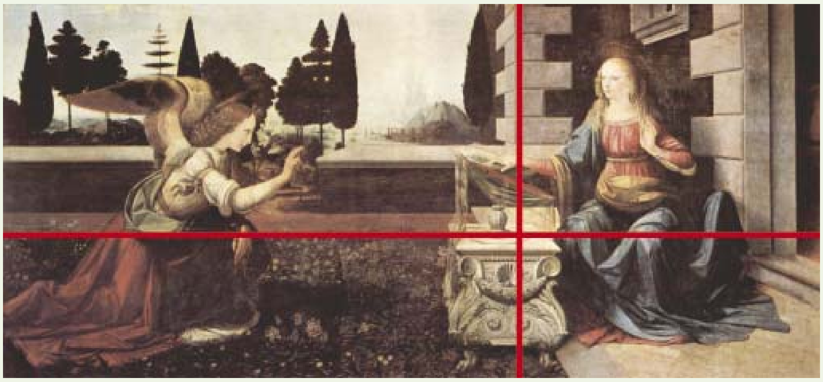
Két gyönyörű festmény

4. Ⓚ Itt látható *Auguste Renoir Nő a békástanyán* című képe.

a) „Függőlegesen" és „vízszintesen" is rajzold meg a festményt az aranymetszés arányában két részre osztó egyeneseket (két függőleges és két vízszintes egyenest)! Milyen érdekes egybeeséseket fedeztél fel?

b) Mi lett volna, ha Renoir valamelyik, az alábbiakban látható módon helyezte volna el festményének főalakját a változatlan méretű vásznon? Legyél műkritikus, beszélj az arányok jelentőségéről, a „hangsúlyokról" is!

5. Ⓚ A képen *Leonardo da Vinci* egyik híres festménye, az *Angyali üdvözlet* látható.



a) A tárlatvezető hangosan beszél, de a látogatók néha még hangosabbak, és nem értesz minden szót. Pótold a hiányokat!
„A háttérben lévő fal, valamint az asztal … vonala nagyjából a függőleges … vonalában található. Ez a vonal választja el egymástól Máriát és az angyalt (a két világot), egyedül Mária keze lóg át a »másik világba«. A vízszintes vonal nagyjából a háttér és az előtér talaját elválasztó vonalnál található, és az általa elválasztott tér ugyanazon felén van Mária és az angyal … vonala, ami a kép egyensúlyát segíti."

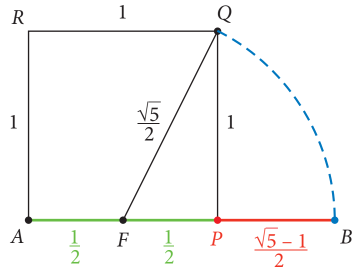
b) Mi található a piros vonalakkal felosztott képen a bal oldali felső képrész aranymetszeteiben? Hogyan osztható fel a jobb felső képrész? Rajzold be a megfelelő vonalakat és figyeld meg, milyen elvek szerint felelhet meg a kép elrendezése az aranymetszés szabályainak!

KIDOLGOZOTT FELADAT

3. Az 1 oldalú négyzetből kiindulva szerkesszünk olyan AB szakaszt, amelynek az aranymetszésénél adódó nagyobbik része éppen 1 hosszúságú (és így a kisebbik része $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ hosszúságú)!

Megoldás

A szerkesztés menete az ábráról leolvasható:



– A négyzet AP oldalának F felezőpontját összekötjük a négyzet Q (vagy R) csúcsával;

– Az FQ szakasz hossza Pitagorasz-tétellel számítható: $\frac{\sqrt{5}}{2}$;

– F középpontú, FQ sugarú kört rajzolunk, és megjelöljük az AB egyenesével alkotott egyik metszéspontját (B);

– $PB = FQ - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, az AP szakasz hossza 1, tehát az AB szakaszt a P pont az aranymetszés szerint vágja két részre.

HÁZI FELADAT

1. Ⓚ Olvassátok el a Wikipédia cikkét a Vitruvius-tanulmányról (angolul: Vitruvian Man)! Keressetek a tanulmányban olyan aránypárokat, melyek az aranymetszéshez kapcsolhatók!

2. Ⓚ Keressetek képet Michelangelo Dávid-szobráról, és állapítsátok meg, hol található a szobron az aranymetszés!

3. Ⓚ Irodalom-, ének-zene és művészettörténet-tanáraitok segítségével gyűjtsetek össze olyan alkotásokat, amelyekben az aranymetszésnek fontos szerepe van. A zenetörténetben Bartók Béla *Kékszakállú*ja és Beethoven *5. Szimfóniá*ja jó példák lehetnek. A filmtörténetben az olyan népszerű filmek, mint *Az elveszett frigyláda fosztogatói*, a *Batman: A Sötét Lovag*, a *Watchmen*, a *Csillagok háborúja* és a *Wall-E* is dramaturgiailag kulcsfontosságú részleteket helyez el az aranymetszésben. Keresd meg, hogy mi található ezekben a művekben az aranymetszésnél!

62 SZÖGEK ÍVMÉRTÉKE

BEVEZETŐ

Mekkora az α és mekkora a β, ha

a) az 5 cm sugarú körben az α fokos középponti szöghöz 10 cm hosszú körív tartozik;

b) a 28 cm sugarú körben a β fokos középponti szöghöz tartozó körív kétszer akkora, mint a kör sugara?

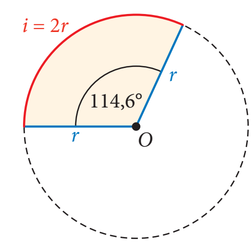
Megoldás

a) Arányosság alkalmazásával kiszámíthatjuk az α-t. Ehhez az ívhossz és a középponti szög közötti egyenes arányosságot használjuk: az α úgy aránylik a teljesszöghöz, ahogy a körív hossza a kör kerületéhez. Vagyis $\alpha : 360 = 10 : (2 \cdot 5 \cdot \pi)$, így $\alpha = \frac{360}{\pi} \approx 114{,}6$.
A középponti szög tehát körülbelül 114,6°-os.

b) Az a) feladatban szereplő 5 cm sugarú körben is kétszer akkora volt az ív hossza, mint a kör sugara. Ha az 5 cm sugarú kört az 5,6-szeresére nagyítjuk, akkor egy 28 cm sugarú kört kapunk. A nagyított körív hossza kétszerese lesz a nagyított kör sugarának, hiszen a nagyítás a hosszúságok arányát nem változtatja meg. Mivel az α fokos középponti szög a nagyítás során nem változik, ez azt jelenti, hogy $\beta = \alpha \approx 114{,}6$.
A középponti szög tehát körülbelül 114,6°-os.

Megjegyzés

A bevezető feladat azt mutatja, hogy ha egy adott körben egy körív kétszer akkora, mint a kör sugara, akkor a körívhez tartozó középponti szög – a kör sugarától függetlenül – körülbelül 114,6°-os.



FELADAT

1 Hány fokos középponti szög tartozik a körívhez, ha a körív hossza a kör sugarának

a) háromszorosa; **b)** fele; **c)** π-szerese; **d)** 2π-szerese?

2 Hány fokos középponti szög tartozik a körívhez, ha a körív hossza ugyanakkora, mint a kör sugara?

3 Hányszor akkora az $\alpha°$ fokos középponti szöghöz tartozó körív, mint a kör sugara, ha

a) $\alpha = 80$;

b) $\alpha = 360$;

c) $\alpha = 1$;

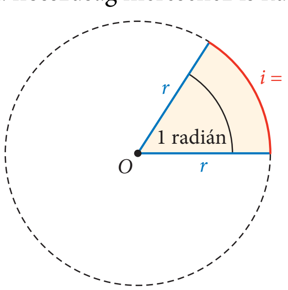
d) $\alpha = 120$?

ELMÉLET

A körív hosszának és a kör sugarának az aránya egyértelműen meghatározza a középponti szög nagyságát. Ezt mérhetjük a *fok* mértékegységgel, de más egységet is választhatunk a szög méréséhez [ahogyan például a hosszúság méréséhez is különböző egységeket – méter, láb, inch (hüvelyk = col), mérföld stb. – használhatunk].

Megfigyeléseink alapján bevezetjük a szögek egy újfajta mértékegységét, a *radiánt*.

1 radiánnak *mondjuk azt a szöget, amelyhez mint középponti szöghöz egy körben ugyanakkora körív tartozik, mint amekkora a kör sugara.*
Azt a számot, amely megmutatja, hányszorosa a középponti szöghöz tartozó ív a sugárnak, a szög **ívmértékének** nevezzük. Ezért *egy középponti szög ívmértéke kiszámítható úgy, hogy a hozzá tartozó ívhosszúságot elosztjuk a kör sugarával.*



Például
a 3. feladatban éppen a szögek ívmértékét számítottuk ki, vagyis azt, hogy hány radián nagyságúak a szögek.

A 80°-os szög ívmértéke 1,4, vagyis a 80° körülbelül 1,4 radián (a 80°-os középponti szöghöz tartozó körív kb. 1,4-szer olyan hosszú, mint a kör sugara);

a 360°-os szög ívmértéke 2π, vagyis a 360° pontosan 2π radián ($\approx 6{,}28$ radián);

az 1°-os szög ívmértéke $\frac{\pi}{180}$, vagyis az 1° pontosan $\frac{\pi}{180}$ radián ($\approx 0{,}0174$ radián);

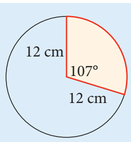
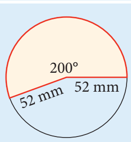
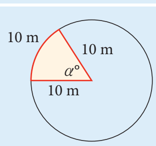
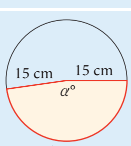
a 120°-os szög ívmértéke $\frac{2\pi}{3}$, vagyis a 120° pontosan $\frac{2\pi}{3}$ radián ($\approx 2{,}094$ radián) (a 120°-os középponti szöghöz tartozó körív közelítőleg 2,094-szer olyan hosszú, mint a kör sugara).

Ha egy r cm sugarú körben egy középponti szöghöz i cm hosszúságú körív tartozik, akkor
– ez a szög $\frac{i}{r}$ *radián*;
– ennek a szögnek az *ívmértéke* $\frac{i}{r}$.
0°-os szög 0 radián, ívmértéke 0. A 360°-os teljesszög 2π radián, ívmértéke tehát 2π.
Az 1°-os szög ívmértéke $\frac{\pi}{180}$, az α°-os szög ívmértéke $\frac{\alpha \cdot \pi}{180}$. Tehát $\alpha° = \frac{\alpha \cdot \pi}{180}$ radián.

Megjegyzés
A *radián* mértékegységet rövidítve *rad*-nak írjuk.

FELADAT

4 Készítsd el a táblázatot a füzetedben, és töltsd ki az üres mezőket!

		A kör sugara	A kör kerülete	A középponti szög fokban	A körív hossza	A középponti szög ívmértéke
I.		12 cm		107°		
II.		52 mm		200°		
III.			20π m		10 m	
IV.		15 cm			45 cm	

5 Egy 6 dm sugarú körlemezből olyan körcikket vágunk ki, amely a kör ötödrésze.
a) Mekkora a körcikk középponti szögének ívmértéke?
b) Mekkora alapkörű kúppalástot csavarhatunk ebből a körcikkből?

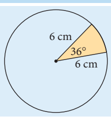
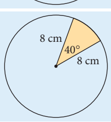
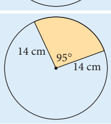
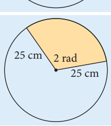
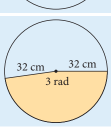
HÁZI FELADAT

1 Add meg az alábbi szögeket ívmértékben! Válaszolj pontos értékekkel és közelítő értékekkel is! A füzetedbe dolgozz!

fokban		360°	180°	135°	90°	45°	30°	10°	1°
radiánban	pontos érték	2π							
radiánban	közelítő érték	6,28							

2 Egy háromszög egyik szöge 24°, a másik szöge 2,3 radián. Mekkora a harmadik szöge? Fejezd ki fokban is, radiánban is!

3 Az órai 4. feladathoz hasonlóan töltsd ki a táblázat üres mezőit a füzetedben!

		A kör sugara	A kör kerülete	A középponti szög fokban	A körív hossza	A középponti szög ívmértéke
a)		6 cm		36°		
b)		8 cm		40°		
c)		14 cm		95°		
d)		25 cm				2
e)		32 cm				3

Táblázatkezelő programmal ellenőrizheted a megoldásaidat.

RÁADÁS

1 Egy pontos óra kis és nagymutatói 12:00-kor fedésben vannak egymással.

a) Hány órakor vannak ugyancsak fedésben egymással 4 és 5 óra között?

b) Oldd meg úgy is a feladatot, hogy a feladat során felmerülő szögeket radiánban számolod!

2 Egy körcikket úgy csavartunk össze, hogy kúppalástot formáljon. A kúp alapkörének sugara 6 cm, a kúp magassága 14 cm.
Mekkora volt a körcikk középponti szöge? Válaszolj ívmértékben!

3 Egy kör alakú futópályán két futó tart edzést úgy, hogy egyenletes sebességgel futnak, és ugyanonnan indulnak. Albert sebessége akkora, hogy 1 perc alatt ugyanakkora utat tesz meg, mint a pálya sugara. Béla sebessége akkora, hogy 1 perc alatt akkora utat tesz meg, mint a pálya sugarának 70%-a.
Mennyi idő telt el, amíg harmadszor haladnak el egymás mellett, ha

a) egy irányban futnak?

b) egymással szemben futnak?

c) Mekkora a futók szögsebessége?

Általában megdöbbenést kelt, amikor először találkozunk a szög mérésének a leckében vázolt módjával. Miért van erre szükség, kinek jobb ez a bonyolult mérési eljárás? – legtöbbször ezek a kérdések vetődnek fel.

A matematika (és a fizika) oldaláról közelítve a válasz meglehetősen rideg: jogunk van a mérés egységét önkényesen megválasztani. A hosszúság egységének a métert választották az SI-mértékegységrendszerben, és a gyakorlati életben ennek többszöröseit is meg a részeit is gond nélkül használjuk (km, cm, mm, nm stb.).

Az angolszász országokban viszont más mértékegységek használatosak inkább. Számukra a méterben megadott hosszúság szokatlan, és első rápillantásra sokan nem is tudják megbecsülni, mekkora is az a távolság, amely éppen 57 méter.

Így vagyunk ezzel mi is: a ½″-os (fél colos) átmérőjű cső, vagy az 510 yard távolság első hallásra legtöbbünknek nem sokat mond. Akkor tudjuk elképzelni ezeket, ha átváltjuk az általunk használt, megszokott mértékegységek szerinti rendszerbe.

Például a „28-as kerékpár” azt jelenti, hogy a kerekek átmérője éppen 28 col, vagyis 71,12 cm (mert 1 col = 2,54 cm); a 120 yardos gátfutás 109,73 méteres gátfutást jelent, majdnem a 110 méteres gátfutással azonos (1 yard = 0,9144 m).

A szög mérésével pontosan ugyanez a helyzet. Eddig a teljesszög 360-ad részét választottuk egységnek (ezt 1°-nak neveztük el), most pedig azt a szöget választottuk egységnek, amelyhez – mint középponti szöghöz – ugyanakkora körív tartozik, mint amekkora a kör sugara (ezt 1 radiánnak nevezzük). Nincs tehát semmi különleges ebben, csak a megszokás miatt érzünk „ellenkezést”. Ez azonban némi gyakorlással könnyen legyőzhető.

A fizika a körmozgás és a forgómozgás leírásakor használja a szög ívmértékét, hiszen például az egyenletes forgómozgás szögsebességét az $\omega = \frac{2\pi}{T}$ összefüggés adja meg. Ennek pedig az a jelentése, hogy T másodperc alatt az egyenletes forgómozgást végző test pontosan egyszer fordul körbe, azaz a forgó test éppen 2π nagyságú szöggel fordult el a forgástengelye körül. Nyilvánvaló, hogy itt a szög ívmértékéről van szó, ezért is lesz a szögsebesség mértékegysége $\frac{1}{\text{s}}$. Eszerint egységnyi a szögsebessége annak az egyenletes forgómozgásnak, amelyben az 1 másodperc alatti szögelfordulás éppen 1 radián nagyságú.

Aki ezt nem tudja elképzelni, annak szüksége van arra, hogy a radián helyett fokban adja meg az elfordulás szögét. Ez könnyű dolog, hiszen 1 radián $= \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57{,}3°$.

63 SZÖGEK FOKBAN ÉS RADIÁNBAN

ELMÉLET

Hány fokos az 1 radián nagyságú szög?

A teljesszög ívmértéke 2π, vagyis 2π radián = 360°. Ebből 2π-vel osztva azt kapjuk, hogy

$$1 \text{ radián} = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57{,}3^\circ.$$

Az előző leckében megfigyeltük, hogyan függ össze egymással a szög kétféle mértékegysége.
A kétféle mértékegységben megadott szögek mérőszáma egyenesen arányos, ezért

$$\alpha \text{ radián} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \alpha\right)^\circ, \qquad \alpha^\circ = \left(\frac{\pi}{180} \cdot \alpha\right) \text{ radián}.$$

Hogyan térhetünk át egyik mértékegységről a másikra?

– Képletek megjegyzése helyett elég, ha azt tudjuk, hogy **180° = $\boldsymbol{\pi}$ radián**, és azután az egyenes arányosság felhasználásával végezzük el a konkrét átváltásokat.
– Sok zsebszámológép közvetlenül elvégzi az átváltásokat a megfelelő gomb felhasználásával. Tanulmányozd a saját számológépedet, figyeld meg az átváltás módszerét!

FELADAT

1 Hány fokos a $\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)$ ívmértékű szög. Figyeld meg a három megoldási módszert, értékeld őket!

Első módszer:

$\frac{2\pi}{3} = 2 \cdot 3{,}14 : 3 = 2{,}093333,$

$\frac{5\pi}{6} = 5 \cdot 3{,}14 : 6 = 2{,}616667,$

$\frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} = 2{,}093333 + 2{,}616667 \approx 4{,}71,$

tehát a szög 4,71 radián.

$4{,}71 \text{ radián} = \left(4{,}71 \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{847{,}8}{3{,}14}\right)^\circ = 270^\circ.$

Második módszer:

π radián = 180°, $\frac{2\pi}{3}$ ennek a $\frac{2}{3}$ része, vagyis 120°;

az $\frac{5\pi}{6}$ radián a 180°-nak az $\frac{5}{6}$ része, vagyis 150°.

$\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)$ radián = 120° + 150° = 270°.

Harmadik módszer

$\frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2},$

tehát ez a szög $\frac{3\pi}{2}$ radián.

$\frac{3\pi}{2}$ radián = π radián + $\frac{\pi}{2}$ radián = 180° + 90° =
= 270°.

2 Hány fokosak azok a szögek, amelyeknek az ívmértéke

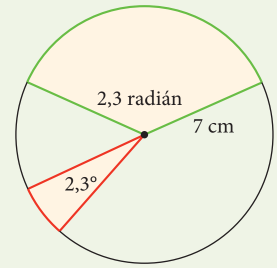
a) $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$;

b) $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$;

c) $\frac{4\pi}{5} + \frac{2\pi}{3}$;

d) $\frac{4\pi}{5} - \frac{2\pi}{3}$?

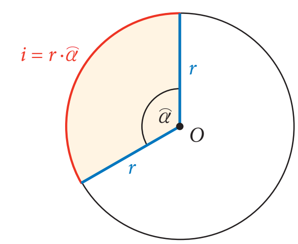
3 Mekkora körív tartozik egy 7 cm sugarú körben
a) a 2,3 radián nagyságú **b)** a 2,3°-os
középponti szöghöz?



4 Mekkora területű körcikk tartozik a 7 cm sugarú körben
a) a 2,3 radián nagyságú **b)** a 2,3°-os
középponti szöghöz?

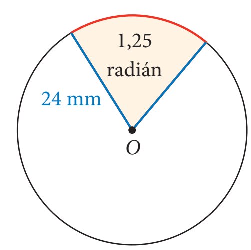
ELMÉLET

Ha egy r cm sugarú körben egy középponti szög α°-os, akkor a hozzá tartozó *körív hossza* $\frac{r\pi\alpha}{180} = r\cdot\frac{\pi\alpha}{180}$ (cm), a megfelelő *körcikk területe* pedig $\frac{r^2\pi\alpha}{360} = \frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi\alpha}{180}$ (cm^2).



Mivel $\frac{\pi\alpha}{180}$ éppen az α°-os szög ívmértéke (amit legtöbbször $\hat{\alpha}$-val jelölnek), ezért ha a középponti szög $\hat{\alpha}$ radián, akkor a hozzá tartozó körív hossza $r\cdot\hat{\alpha}$ cm, a körcikk területe pedig $\frac{r^2\cdot\hat{\alpha}}{2}$ cm^2.

Természetesen továbbra is használható a körcikk területére talált $t = \frac{ir}{2}$ összefüggés.



Például
egy 24 mm sugarú körben az 1,25 radián nagyságú középponti szöghöz tartozó körív hossza $24\cdot 1,25 = 30$ (mm), a megfelelő körcikk területe pedig ennek 12-szerese: 360 mm^2.

HÁZI FELADAT

1 Hányszor akkora
a) a 100°-os szög, mint az 1 radián nagyságú szög; **b)** a 160°-os szög, mint az 1,6 radián nagyságú szög?

2 Add meg az alábbi szögeket fokban!

π; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{5}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{9}$; $\frac{\pi}{12}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4}$

3 Mekkora körív és mekkora területű körcikk tartozik egy 2,4 radián nagyságú középponti szöghöz, ha a kör sugara
a) 10 cm; **b)** 15 cm; **c)** 15 mm; **d)** 3 dm?

4 Egy 6 cm sugarú körben egy körcikk területe 13,5 cm^2. Mekkora a körcikkhez tartozó
a) körív; **b)** középponti szög?

64 GYAKORLÁS

FELADAT

1 Egy fényképen egy fa 9 cm „magas”, a fa mellett álló 1,80 méter magas fiú pedig 4 cm magasságúnak látszik.

a) Milyen magas a fa?

b) Milyen magasnak látszik a fényképen a fiú mellett álló 1,6 m magas öccse?

c) A fa mellett egy 4 m^2 területű, téglalap alakú reklámtábla is állt, szemben a fényképezőgéppel. Mekkora területűnek látszik a reklámtábla a fényképen?

2 Ha egy 1 cm átmérőjű acélgolyóval szemléltetnénk egy protont (a hidrogénatom magját), akkor mekkora lenne egy hidrogénatom egy méretarányos modellben?

Adatok (közelítések): a proton átmérője 10^{-15} m, a hidrogénatom átmérője 10^{-10} m.

a) Az atom átmérője hányszor akkora, mint a magátmérő?

b) Mekkora lenne a modellben a hidrogénatom átmérője?

3 Egy kör alakú asztallap átmérője ugyanannyi, mint az asztal magassága. Az asztal közepe fölött, a talajtól 185 cm magasságban van egy pontszerű fényforrás. A talajon az asztal árnyéka egy 70,5 cm sugarú kör.

a) Készíts ábrát! **b)** Mekkora az asztallap sugara?

4 Egy négyszög három belső szöge 0,8 radián, 1,2 radián, illetve 1,5 radián nagyságú. Konvex vagy konkáv ez a négyszög?

5 Legyen

$f: x \mapsto x^2$, $g: x \mapsto x^2 + 2$ és $h: x \mapsto (x+3)^2 - 2$.

Az f grafikonját az $\mathbf{u}$ vektorral eltolva a g grafikonját, a $\mathbf{v}$ vektorral eltolva a h grafikonját kapjuk.

Add meg annak a függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelynek grafikonját az f függvény grafikonjából

a) az $(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ vektorral;

b) az $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ vektorral;

c) az $\left(\frac{1}{3}\mathbf{u} - \frac{1}{3}\mathbf{v}\right)$ vektorral

való eltolással kapunk!

HÁZI FELADAT

1 Egy háromszög súlypontja a háromszög csúcsaitól rendre 5 cm, 5,8 cm, 6,2 cm távolságra van.

a) Mekkora a háromszög súlyvonalainak hossza?

b) Mekkorák a háromszög középvonalai által meghatározott háromszög súlyvonalai?

2 Hajni a Naprendszer és a Tejútrendszer „méretarányos” modelljét szeretné elkészíteni. Úgy gondolja, hogy a Napot egy kb. 7 cm átmérőjű teniszlabda szemléltethetné. Sikerrel jár-e Hajni?

Adatok (közelítések): a Nap átmérője 1,4 millió km, a Nap–Föld távolság 150 millió km, a Föld átmérője 12 700 km, a Naprendszer átmérője $1{,}1 \cdot 10^{10}$ km, a Tejútrendszer átmérője $9{,}5 \cdot 10^{17}$ km.

a) Mekkora lenne Hajni modelljében a kicsinyítés aránya?

b) Mekkora lenne a modellben a Föld átmérője?

c) Mekkora távolságra lenne a Föld a Naptól Hajni modelljében?

d) Mekkora lenne ebben a modellben a Naprendszer átmérője?

e) Mekkora lenne ebben a modellben a Tejútrendszer átmérője?

3 Az **u**, **v** bázisrendszerben

$\mathbf{a} = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$ és $\mathbf{b} = -3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$.

Írd fel az alábbi vektorokat is ugyanebben a bázisrendszerben!

a) $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$

b) $\mathbf{y} = -2\mathbf{b}$

c) $\mathbf{w} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$

d) $\mathbf{z} = \dfrac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{2}$

4 Melyik állítás igaz, ha az n egy 2-nél nagyobb természetes számot jelöl?

a) Az n oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege π radián.

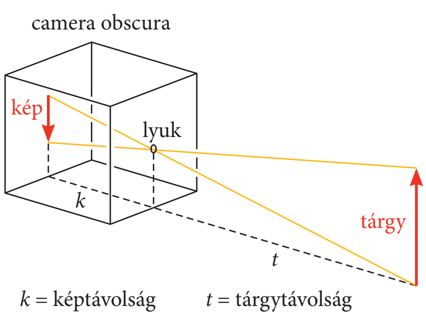
b) Az n oldalú konvex sokszög külső szögeinek összege π radián.

c) Az n oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege $(n - 2) \cdot \pi$ radián.

d) Az n oldalú szabályos sokszög egy belső szöge $\dfrac{n\pi}{3}$ radián.

RÁADÁS

A *camera obscura* vagy más néven lyukkamera az egyik legegyszerűbb leképező rendszer, mert mindössze egy zárt dobozból áll, amelynek az egyik oldalán egy picike lyuk van. Ha a lyuk elég kicsi, a fény a lyukon való áthaladáskor a tárgy minden egyes pontjáról a doboz szemközti falán egy-egy pontba érkezik, vagyis egyértelmű leképezés történik a tárgy és a képpontok között. A keletkezett kép fordított állású, és (némi elhanyagolással) a tárgyhoz hasonló.



A nagyítás (kicsinyítés) mértéke:

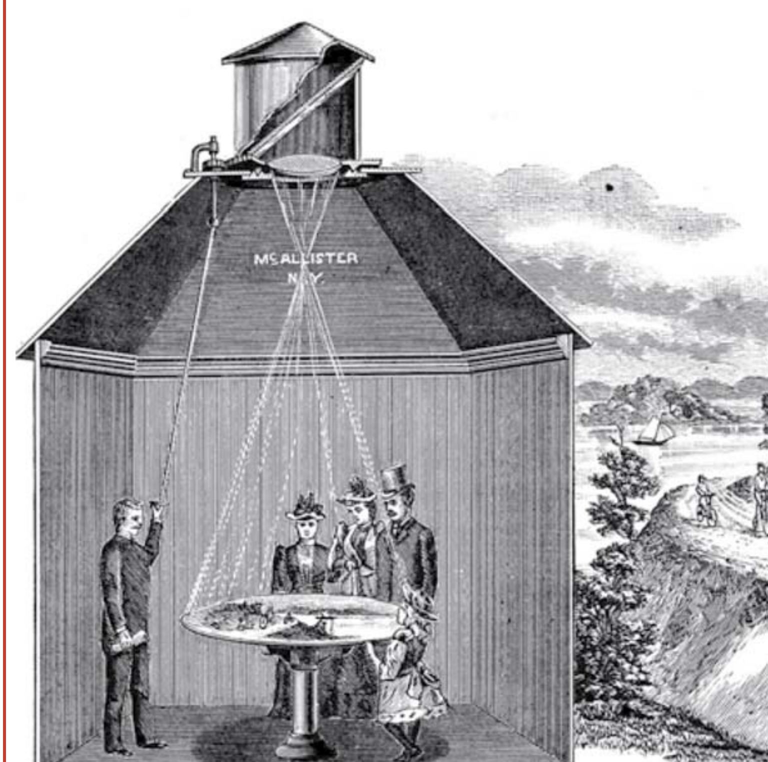
$$\frac{\text{kép mérete}}{\text{tárgy mérete}} = \frac{\text{képtávolság}}{\text{tárgytávolság}} = \frac{k}{t},$$

ami az ábra alapján könnyen belátható (k a doboz méretéből adódó állandó távolság).

Világos, hogy a nagyítás aránya függ a camera obscurától való távolságtól, a messzebb lévő tárgyak erősebben kicsinyítve jelennek meg a doboz lyukkal szemközti falán. A keletkező kép az igen egyszerű előállítás ellenére rendkívül éles.

A camera obscura a fényképezőgép őse, a mai fényképezőgépek is a lyukkamera működési elvén alapulnak. A fényképezés előtti időkben mint rajzolási segédeszközt és mint fizikai, csillagászati eszközt tartották számon.

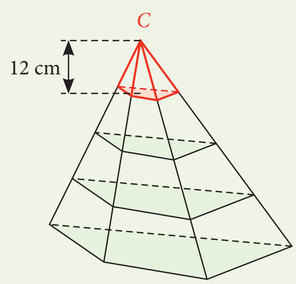
Egerben a sok látnivaló mellett érdemes felkeresni a Líceumot is, ahol a csillagvizsgáló-toronyban egy igazi, tükrös szerkezetű camera obscurát is megcsodálhatunk. A Líceum 53 méter magas csillagásztornyába 1779-ben érkezett a „varázslatos” camera obscura. Tükör és lencse segítségével az alatta kialakított szinten kicsinyke besötétített szobában egy fehér asztalon megjelenik a város látképe. A kép olyan éles, hogy a sétáló emberek felismerhetők. A készülék Edinburgh-ból származik, az intézmény első csillagásza, Hell Miksa azért működtette ezt a „városnéző eszközt”, hogy a város lakóit és látogatóit szórakoztassa.



65 ISMÉTLÉS, GYAKORLÁS

FELADAT

1 Egy gúla alapterülete 25 cm^2, magassága 12 cm, az alaplappal szemközti csúcsa *C*. Ebből a *C* pontból 2-szeres, 3-szoros, 4-szeres középpontos hasonlósággal megnagyítjuk ezt a gúlát, így kapjuk a 2., a 3. és a 4. gúlát.



a) Mennyi a négy gúla magasságának aránya,
alapterületének aránya,
térfogatának aránya?

b) Készítsd el a táblázatot a füzetedben, és töltsd ki az üres mezőket!

A gúla sorszáma	Magasság (cm)	Alapterület (cm^2)	Térfogat (cm^3)
1.	12	25	
2.			800
3.	36		
4.		400	

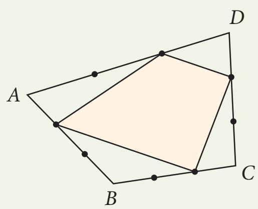
c) Az ábra is mutatja, hogy a 4. (a legnagyobb) gúla felbontható négy, egyenlő magasságú testre: az eredeti kis gúlára és három csonkagúlára. Az 1–4. gúlák térfogata segítségével számítsd ki a három csonkagúla térfogatát! (Például a második csonkagúla térfogatát megkapjuk, ha a 3. gúla térfogatából kivonjuk a 2. gúla térfogatát.)

d) Írd fel a c) pontban vizsgált 4 test térfogatának arányát!

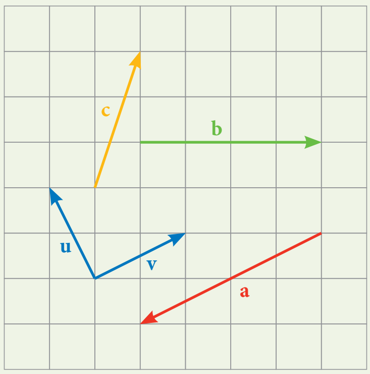
2 Jutkának az egyik fotókiállításon megtetszett egy tájkép, lefényképezte. Az exponálás pillanatában azonban egy légy röppent a képre, Jutka (akaratán kívül) ezt is megörökítette. Egymás alatt látod az eredeti méretű tájképet és Jutka fotóját.

Hogyan szerkesztenéd meg az eredeti képen a légy helyét? Írd le a szerkesztés menetét is!

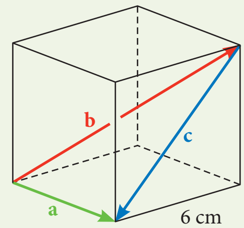
3 Az *ABCD* négyszög oldalait három-három egyenlő részre osztottuk, és az osztópontok közül négyet az ábrán látható módon kötöttünk össze. Igazold, hogy az összekötő vonalak trapézt alkotnak, és állapítsd meg a párhuzamos oldalak hosszának arányát!



4 **a)** Add meg az **u**, **v** bázisrendszerben mind az öt vektor vektorkoordinátáit!



b) A kocka éle 6 cm hosszú. Milyen hosszú a **b**, a **c**, az $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ és a $\mathbf{b}-\mathbf{a}+\mathbf{c}$ vektor?



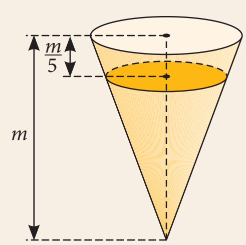
HÁZI FELADAT

1 Jelöld meg egy általános háromszögben a súlypont és az oldalfelező pontok közötti szakaszok felezőpontjait!

a) Igazold, hogy ez a három pont az eredeti háromszöghöz hasonló háromszöget határoz meg!

b) Írd fel a két hasonló háromszög területének arányát!

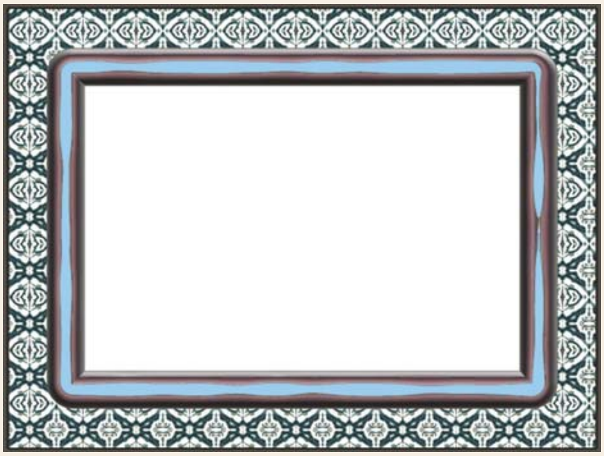
2 A kúp alakú papírtölcsérből a pattogatott kukoricát a teli tölcsér magasságának felső ötödéig eszi meg István. Lucának viszi a többit. Kinek jutott több? Mennyivel?



3 Jutka az iskolai kiránduláson 1280 × 960-as felbontású képeket készített, a képeket számítógépe merevlemezére mentette. Barátnője, Julcsi kérésére néhány képet el akar küldeni elektronikus levélben. Egy kép tárolása körülbelül 1,2 Mb helyet igényel a merevlemezén. A tíz kiválasztott kép együttes mérete túl nagy, ezért Jutka a képeket 640 × 480-as felbontásban küldi el.

a) Hány megabájt lesz a 10 kép együttes „helyigénye"? (Az 1280 × 960-as felbontás azt jelenti, hogy a kép 960 vízszintes sorban, soronként 1280 darab képpontból áll össze. A számítógép minden képpont tárolásához ugyanakkora lemezterületet használ.)

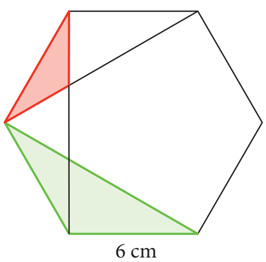
b) Jutka egy 16 cm × 9 cm-es keretben szeretné elhelyezni az egyik jól sikerült képet úgy, hogy minden részlet megmaradjon. Emiatt csak olyan képeket tud nyomtatni, amelyek oldalainak aránya 640 : 480. Mekkorák annak a képnek a méretei, amelyik a keretbe illik és a lehető legnagyobb?



66 TUDÁSPRÓBA

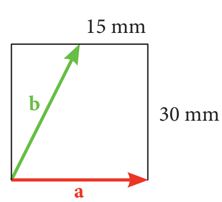
TUDÁSPRÓBA I.

1. Egy szabályos hatszög oldalai 6 cm-esek. Megrajzoltuk három átlóját.

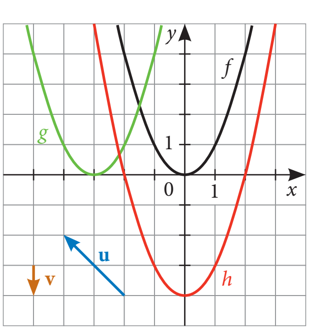


a) Igazold, hogy a zöld és a rózsaszínű háromszög hasonló egymáshoz!
b) Mennyi a hasonlóság aránya?
c) Hasonló-e valamelyik fehér háromszög a zöldhöz? Miért?
d) Mekkora részekre vágják egymást az átlók?

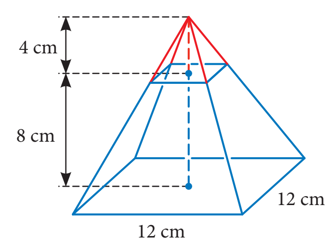
2. Milyen hosszú a $2\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$ és a $2\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ vektor, ha a négyzet oldalai 30 mm-esek?



3. Az **u** és a **v** egy bázisrendszert határoz meg.
Mik a koordinátái az (**u**, **v**) rendszerben azoknak a vektoroknak, amelyekkel az f másodfokú függvény grafikonja átvihető a g, illetve a h másodfokú függvény grafikonjába ($D_f = D_g = D_h = \mathbf{R}$)?



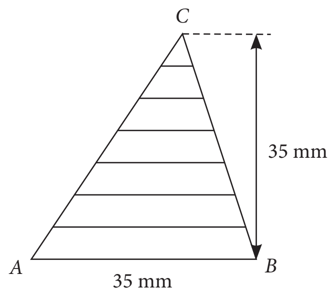
4. Egy szabályos gúla alaplapja 12 cm-es oldalú négyzet, a gúla magassága is 12 cm. A magasság felső harmadolópontján átmenő, az alaplappal párhuzamos síkkal két részre vágjuk a gúlát. Mennyi a két rész térfogatának aránya?



TUDÁSPRÓBA II.

1 Egy háromszög oldalainak hosszúsága 14 cm, 28 cm és 35 cm. Egy hozzá hasonló másik háromszög kerülete 7,7 cm. Mekkorák ennek az oldalai?

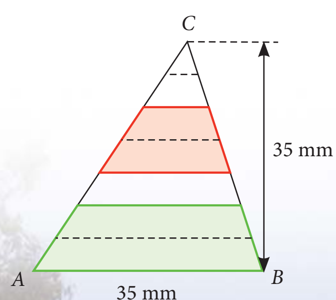
2 Egy háromszög egyik oldala 35 mm, a hozzá tartozó magasság is ekkora. A háromszög másik két oldalát 7-7 egyenlő részre vágtuk, a megfelelő osztópontokat összekötöttük.



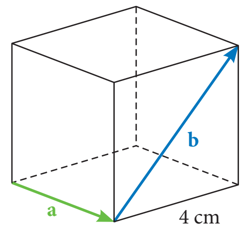
a) Keress az ábrán hasonló trapézokat! Add meg a csúcsaikat és a hasonlóságuk arányát!

b) Mekkora a legkisebb háromszög területe?

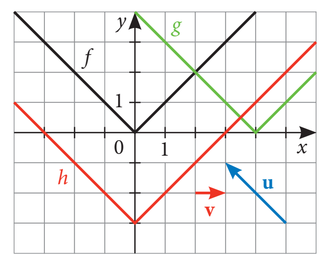
c) Mennyi a következő ábrán a zöld és a piros trapéz területének aránya?



3 A kocka élei 4 cm-esek. Mekkora az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ és az $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ háromszoros nagyítása?



4 Az $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v}$ egy bázisrendszert határoz meg. Mik a koordinátái az $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ rendszerben azoknak a vektoroknak, amelyekkel az f függvény grafikonja átvihető a g, illetve a h grafikonjába ($D_f = D_g = D_h = \mathbf{R}$)?



TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

1 Az $ABCD$ téglalap AB oldala 3,6 cm hosszú, BC oldala 2,4 cm hosszú.

a) Készíts ábrát, és rajzold be az ábrán a következő vektorokat: $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{CA}$; $-\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CD}$.

b) Melyek ezek közül egyállású vektorok?

c) Melyek ezek közül azonos hosszúságú vektorok?

2 Az $ABCD$ rombusz középpontja legyen O. Az AC átló hossza 2,8 cm, a BD átló hossza 3,6 cm.
Milyen hosszúak a következő vektorok:

a) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}$;

b) $\overrightarrow{DA}$;

c) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$;

d) O-ból a CD oldal felezőpontjába mutató vektor?

3 Derékszögű koordináta rendszerben dolgozz! Az origóból a (2; 0) pontba mutató vektor legyen **u**, az origóból a (0; −1) pontba mutató vektor pedig **v**.

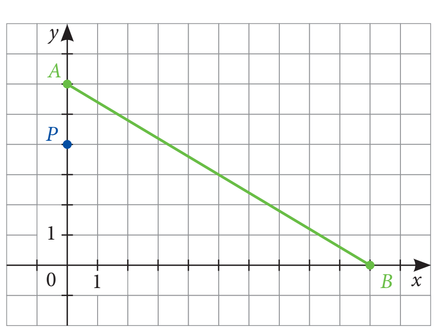
a) Melyik pontba mutat az origó kezdőpontú 3,5**u** + 2**v** vektor?

b) A koordináta rendszer (3; 6) pontja legyen P, (4; −1) pontja pedig Q. Bontsd fel **u** és **v** vektorokkal párhuzamos összetevőkre az $\overrightarrow{OP}$ és a $\overrightarrow{PQ}$ vektorokat! Írd fel **u** és **v** vektorok számszorosainak összegeként az $\overrightarrow{OP}$ és $\overrightarrow{PQ}$ vektorokat!!

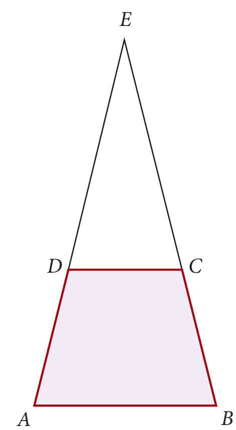
4 Derékszögű koordináta-rendszerben a P ponton át párhuzamost húzunk az AB egyenessel.

a) Milyen hosszú részekre vágja ez az egyenes az OB szakaszt?

b) Az egyenes metszéspontja az x tengellyel legyen Q. Hányadrésze a PQ szakasz hossza az AB szakasz hosszának?



5 Egy szimmetrikus trapéz rövidebbik alapja 5 cm, hosszabbik alapja 8 cm hosszú, magassága 6 cm. Egészítsd ki a trapézt háromszöggé az ábra szerint!



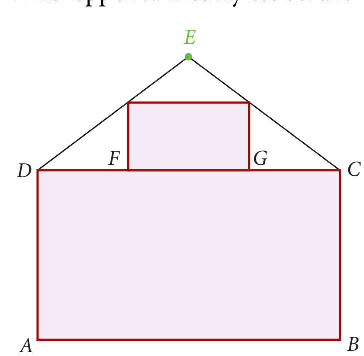
a) Mekkora a háromszög DC oldalhoz tartozó magassága?

b) Mekkorák a háromszög oldalai?

6 Vegyél fel a füzetedben egy szakaszt!
Szerkessz olyan háromszöget, melynek kerülete a szakasz hosszával egyenlő, és oldalainak aránya 3 : 5 : 6!

7 Vegyél fel a füzetedben egy egyenest, és az egyik félsíkban egy háromszöget, a másik félsíkban egy O pontot! Keress olyan O középpontú középpontos hasonlóságot, melyet elvégezve a háromszög valamelyik csúcsa az egyenesre esik! Szerkeszd meg a háromszög képét! (Hány megoldást találtál?)

8 Az ábrán a kis téglalap az $ABCD$ téglalap képe egy E középpontú kicsinyítés során.



a) Bizonyítsd be, hogy *E*, *F* és *A* pontok egy egyenesbe esnek!

b) *F* és *G* pontok harmadoló pontjai az *CD* oldalnak. Mekkora a kicsinyítés arányszáma?

c) Hányszorosa a *CED* egyenlőszárú háromszög alaphoz tartozó magassága az *AD* oldalnak?

9 Egy kikötőből két hajó indul egyszerre. 20 perc múlva 6,2 km távol vannak egymástól. Milyen távol lesznek egymástól az indulástól számítva másfél óra múlva, ha mindkét hajó állandó sebességgel, egyenes irányban halad? Készíts ábrát!

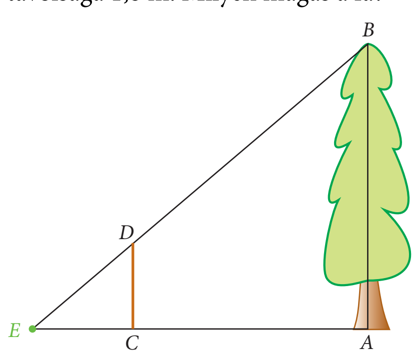
10 Az *ABCD* téglalap *AB* oldala kétszer olyan hosszú, mint a *BC* oldala. Jelöljük *P*-vel a *CD* oldal *C*-hez közelebbi negyedelő pontját!

a) Készíts ábrát! Húzd be az ábrán a téglalap oldalait, az *AC* átlót, és a *BP* szakaszt!

b) Keress két hasonló háromszög-párt! A háromszögek hasonlóságának melyik alapesetével tudod indokolni a hasonlóságot?

c) Mekkora a hasonló háromszögek területeinek aránya?

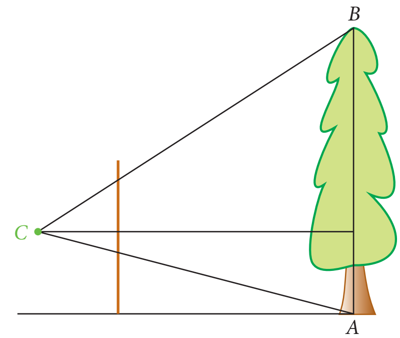
11 Egy fa magasságát egy karó segítségével határozzuk meg. Az ábrán *AB* jelzi a fa helyét, *CD* jelzi a karó helyét. A karó magassága 1,5 m, a karó és a fa távolsága 4,2 m, a karó és a talajon meghatározott *E* pont távolsága 1,8 m. Milyen magas a fa?



12 Egy fa magasságát szeretnénk megmérni. Egy függőleges karót szúrtunk a földbe, a fától néhány méterre. A karó másik oldalán megállunk, a karótól 0,5 m-re. Szemmagasságunk 1,6 m. Bejelöljük a karón azt a két pontot, amely irányban a fa alját és tetejét látjuk. Azt látjuk, hogy a bejelölt pontok a szemmagasság alatt 42 cm-re, és a szemmagasság fölött 92 cm-re vannak.

a) Milyen magas a fa?

b) Milyen messze volt a karó a fától?



13 Egy *ABCD* téglalap oldalai 45 cm és 31 cm hosszúak. A téglalap egy belső *P* pontját összekötjük a téglalap csúcsaival, majd a *PA*, *PB*, *PC* és *PD* szakaszoknak kijelöljük a *P*-hez közelebbi harmadoló pontjait.

a) Milyen síkidomot határoznak meg a harmadoló pontok?

b) Mekkora ennek a síkidomnak a területe?

14 Egy tervrajzon a ház alaprajza 190 cm^2 területű. A valóságban ugyanez az alapterület 142 m^2.

a) Mekkora a tervrajzon az a szoba, amely a valóságban 18 m^2 alapterületű?

b) Milyen széles a valóságban az az ablak, amely a tervrajzon 1,3 cm széles?

c) Hányszoros kicsinyítése a tervrajz a valóságnak?

15 Egy négyzet alapú egyenes gúla alapélei 14 cm hosszúak, magassága 27 cm. Az alaplappal párhuzamos síkokkal a magasság harmadoló pontjaiban a gúlát háromfelé vágjuk.

a) Mekkora az egyes részek térfogata? (a gúla térfogatát a $\frac{T_{alap} \cdot m}{3}$ képlettel számolhatjuk.)

b) Mekkora az egyes részek felszíne?

16 **a)** Mennyi a következő szögek ívmértéke?
27°; 35°; 68°; 108°; 256°?

b) Hány fokosak azok a szögek, melyek ívmértéke:
0,11; 0,434, 0,996; 1,76; 3,02 (radián)?

17 A 34 cm sugarú körben mekkora középponti szög tartozik a 68 cm hosszú körívhez, és a 200 cm hosszú körívhez? A válaszodat radiánban is add meg!

18 A 7,8 cm sugarú körben egy körcikk területe 26,7 cm^2.

a) Mekkora a körcikk középponti szöge?

b) Mekkora a körcikket határoló körív?

19 Egy 24 cm sugarú körből kivágunk egy 2,5 radián középpontú szögű körcikket. Ebből kúppalástot hajtunk.

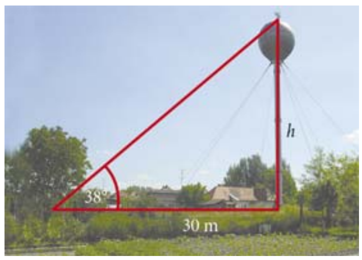
a) Mekkora a palást felszíne?

b) Mekkora a teljes kúp felszíne?

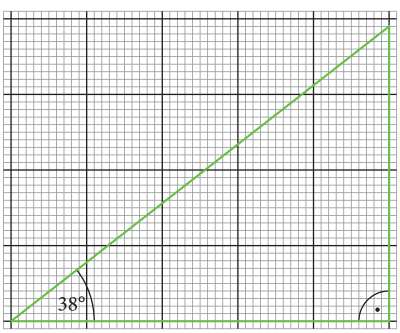
67 HEGYESSZÖG TANGENSE

BEVEZETŐ

Milyen magas a víztorony? 30 m távolságból megmértük, hogy az emelkedési szög 38°-os.



Kicsinyítéssel és méréssel dolgozunk. Milliméterpapírra rajzolunk egy derékszögű háromszöget, amelynek az egyik hegyesszöge 38°-os. Rajzunkon a szög melletti befogó 50 mm, a szöggel szemközti befogó 39 mm hosszúságú. Ez azt jelenti, hogy a 38°-os szöggel szemközti befogó és a szög melletti befogó hosszának aránya 39 : 50, azaz 0,78.



Ez minden olyan derékszögű háromszögben igaz, amelynek van 38°-os hegyesszöge, hiszen ezek a derékszögű háromszögek mindannyian hasonlók egymáshoz. (Tudjuk, hogy a nagyított háromszögben az oldalak aránya ugyanannyi, mint az eredeti oldalaké.)

A torony magassága tehát 30 · 0,78 = 23,4, azaz közelítőleg 23 méter.

Megfigyelés

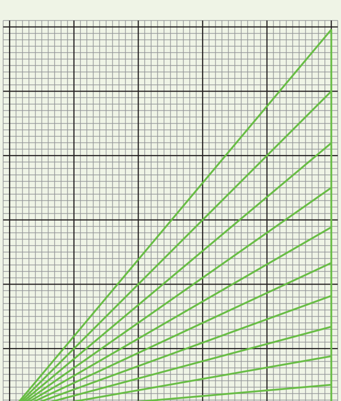
Egyetlen derékszögű háromszög segítségével sokféle problémát megoldhatunk. Milyen derékszögű háromszögekre vonatkoznak ezek? Olyanokra, amelyekről tudjuk, hogy van 38°-os szögük, vagy azt tudjuk, hogy a két befogójuk aránya 0,78.

Például,

ha egy derékszögű háromszög befogóinak hosszúsága 7,8 cm és 10 cm, akkor a kisebbik hegyesszöge 38°-os.

FELADAT

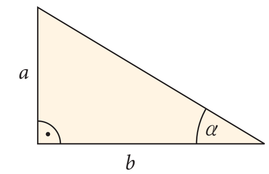
1 További olyan derékszögű háromszögeket rajzoltunk milliméterpapírra, amelyeknek szintén 50 mm az egyik befogójuk. Olvasd le a másik befogó hosszát, és számítsd ki a két befogó arányát! Töltsd ki a táblázatot a füzetedben!



Hegyesszög	Szemközti befogó (mm)	Szög melletti befogó (mm)	Arányuk	
5°	4,5	50	4,5 : 50	0,090
10°		50		
15°		50		
20°		50		
25°	23,5	50	23,5 : 50	0,47
30°		50		
35°		50		
40°		50		
45°	50	50	50 : 50	1
50°	59,5	50	59,5 : 50	1,19

ELMÉLET

Definíció: Ha egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge α, akkor a vele szemben lévő befogó és a mellette lévő befogó hosszúságának a hányadosát az α **tangensének** nevezzük. Az ábrának megfelelő jelöléssel: $\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$. Ez a hányados a szög nagyságától függ.



Például a bevezető feladatban $\text{tg}\,38° = 0{,}78$. Ennek az új fogalomnak a segítségével kiszámíthatjuk szakaszok hosszát, meghatározhatunk szögeket, ha van megfelelő táblázatunk.

FELADAT

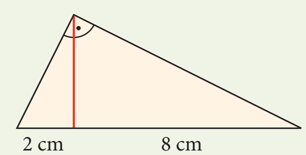
2 Az 1. feladatban készített táblázat felhasználásával válaszolj a következő kérdésekre!

a) Egy derékszögű háromszög egyik szöge 40°-os, az egyik befogója 5 cm hosszú. Mekkora lehet a másik befogója?

b) Egy téglalap oldalai 23,5 cm és 50 cm hosszúságúak. Hány fokos szöget alkot az átlója az oldalakkal?

3 Melyik szögek tangense olvasható le az 1. feladat táblázatáról? Írd fel ezeket az új jelöléssel (például: $\text{tg}\,25° = 0{,}47$)!

4 Egy korábbi házi feladatban szerepel egy olyan derékszögű háromszög, amelynek az átfogóját a magasság 2 cm és 8 cm hosszú szakaszokra osztja.



a) Mekkora az átfogóhoz tartozó magasság?

b) Igaz-e, hogy a háromszög egyik szögének a tangense 2?

c) Mekkora a hegyesszögek tangense?

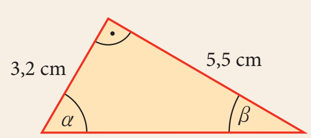
HÁZI FELADAT

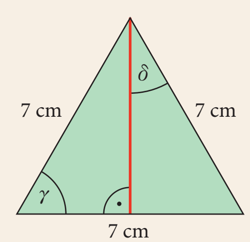
1 Az 1. feladatban készített táblázat felhasználásával válaszolj a következő kérdésekre!

a) Hány fokosak annak a derékszögű háromszögnek a szögei, amelynek az egyik befogója 10 cm, a másik 4,7 cm hosszú?

b) Egy téglalap hosszabbik oldalai 35 cm-esek, és 35°-os szöget alkotnak az átlóval. Mekkorák a téglalap rövidebb oldalai?

2 A sárga háromszög derékszögű, a zöld egyenlő oldalú. Mennyi az α, a β, a γ és a δ szög tangense?





3 Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszögének tangense 0,55. Ezen hegyesszög melletti befogó hossza 1,6 cm.

a) Készíts ábrát!

b) Számold ki a háromszög többi oldalának hosszát!

RÁADÁS

A lejtős utak *meredekségét* „százalékban” adják meg. A 9%-os *meredekség* azt jelenti, hogy a lejtő vízszintessel alkotott hegyesszögének tangense 0,09. Az 1. feladat táblázata szerint az emelkedő tehát 5°-os szöget zár be a vízszintessel.

a) Hány százalékos emelkedésű az a lejtő, amely a vízszintessel 15°-os szöget alkot?

b) Egy 20°-os emelkedésű egyenes úton bizonyos távolságot biciklizve az indulási helyünknél 30 m-rel magasabban fekvő helyre jutottunk. Hány métert bicikliztünk ezen az úton?

c) Egyenletesen emelkedő úton biciklivel 250 m-t lefelé gurulva 23 méterrel lejjebb kerültünk a kiindulási szinthez képest. Hány százalékos lejtőn gurultunk? Hány fokos szöget zár be a vízszintessel a lejtős út?

d) Mit jelent a 100%-os meredekség?

68 SZÁMOLÁS SZÖGEK TANGENSÉVEL

BEVEZETŐ

A hegyesszögek tangensét a zsebszámológépről is leolvashatod, a tan gomb segítségével.
Adjuk meg a következő szögek tangensét számológép segítségével: 64°; 14° 24´; 0,28 radián!

Megoldás

A zsebszámológépek képesek fokban és radiánban megadott szögek tangensének nagy pontosságú megadására, ehhez azonban a gépeknek „tudniuk kell”, hogy fok vagy radián egységben írtuk-e be a szöget. Ennek közlésére sok gépen a DRG gomb szolgál, amelynek többszöri megnyomásával legtöbbször a kijelző legfelső sorában váltakozva a D, illetve DEG (degree = fok), R, illetve RAD (radian) vagy G, illetve GRAD (gon; gradian) jelenik meg. Más gépek esetében ez a MODE gomb megnyomása után a megfelelő számbillentyű leütésével, megint más gépeken külön menüben állítható be.

A 64° tangensének kijelzéséhez tehát állítsuk be a D jelzést a kijelzőn, majd nyomjuk meg a tan gombot, utána pedig írjuk be a 64-et. Ezután az = gombot megnyomva 2,050303842 jelenik meg a kijelzőn, vagyis
tg 64° ≈ 2,0503.

Számológéptől függően előfordulhat, hogy előbb kell a 64-et beírni és csak utána megnyomni a tan gombot (ez főleg egysoros kijelzőjű számológépeknél fordul elő), más gépeknél zárójel használatát is kérheti a gép.

A 14° 24´ tangensének kiszámítása a 64° tangenséhez hasonló módon történhet. A legegyszerűbb, ha a 14° 24´-et 14,4°-ra váltjuk át, és így írjuk be: tan 14,4. Eredményül 0,25675636 ≈ 0,2568 adódik. Van olyan számológép, amelyen közvetlenül beírható a tan 14° 24´ is. Tanulmányozd a géped használati útmutatóját!

A 0,28 radián tangensének kijelzéséhez állítsuk be a gépet úgy, hogy a kijelzőn az R legyen látható. Ezután egyszerűen gépeljük be: tan 0,28. Eredményül 0,287554325 jelenik meg a kijelzőn, azaz
tg 0,28 ≈ 0,2876.

Természetesen megtehetjük, hogy a 0,28 radián nagyságú szöget átváltjuk fokba: 0,28 rad ≈ 16,04°, és így a kijelző D állása mellett írjuk be: tan 16,04. A számológép kijelzőjén 0,287501071 jelenik meg. Az eltérés az átváltásnál, a kerekítés miatt keletkezett.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Melyik az a szög, amelynek a tangense 0,2308?

Megoldás

Számológéppel a következő gombok megnyomásával kaphatjuk meg a választ: 2ndf tan 0,2308 =. Ha a kijelző D állást jelez, akkor fokban kapjuk a választ: 12,99629059; ha a kijelző R állásban van, akkor a választ radiánban adja meg a gép: 0,226828061. Tehát a kérdezett szög megközelítőleg 13°, illetve 0,2268 radián.

A 2ndf helyett a vele azonos hatású SHIFT billentyű található egyes gépeken.

2. Az előző óra bevezető feladatának ötlete alapján, szögmérés segítségével akarják a tanulók egy torony magasságát megmérni. Gondosan kijelölnek egy pontot 30 méterre a torony talpától, majd többször is megmérik, mekkora emelkedési szögben látható a kijelölt pontból a torony csúcsa. Elég pontos a mérőeszközük, így a méréseik eredménye 36° és 38° között „szóródik”.

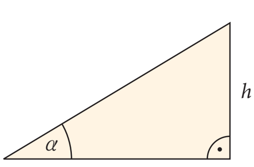
a) Mit mondhatnak a torony magasságáról?

b) Mi lenne a válasz, ha a mérési eredmények 36,5° és 37,5° között szóródnának?

Megoldás

Ha a torony magassága h és a mért szög α, akkor

$\frac{h}{30} = \mathrm{tg}\,\alpha$, vagyis $h = 30 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$.



a) Ha $\alpha = 36°$, akkor
$h = 30 \cdot \mathrm{tg}\,36° \approx 21{,}8$ méter,
ha $\alpha = 38°$, akkor
$h = 30 \cdot \mathrm{tg}\,38° \approx 23{,}4$ méter.
A torony magassága 22 méter és 23 méter között lehet. Nincs értelme ennél „pontosabb” választ adni.

b) Ha $\alpha = 36{,}5°$, akkor
$h = 30 \cdot \mathrm{tg}\,36{,}5° \approx 22{,}2$ méter,
ha $\alpha = 37{,}5°$, akkor
$h = 30 \cdot \mathrm{tg}\,37{,}5° \approx 23{,}0$ méter.
A torony magassága 22 méter és 23 méter között lehet. Most sincs értelme ennél „pontosabb” választ adni.

Megfigyelés

A hétköznapok során a szögmérésnél nem számít „ritka eseménynek” 1-2 foknyi eltérés a mérési eredmények között. (Nézd meg a Lovardáról készült műszaki rajzot; ott is 181° adódik egy háromszög szögeinek összegére.) Nincs értelme ilyen esetben a számológép által kijelzett sok tizedesjegy kiírásának. Látható, hogy még egy kisebb távolság esetében is akár 1 méteres „bizonytalanság” lehet az eredményben. A csillagászok nagyon pontosan mérnek szöget, ám a fényévekben mérhető hatalmas távolságok miatt ők akár több millió kilométert is „tévedhetnek”; mérésüket mégis „elég pontosnak” mondják.

FELADAT

1 Add meg négy tizedesjegyre kerekítve a következő szögek tangensét, számológép segítségével!

a) 1,2°; 12°; 24,6°; 59,9°; 78,3°; 88,4°; 89,9°;

b) 0,12 rad; 0,16 rad; 0,24 rad; 0,48 rad; 0,6 rad; 1 rad; 1,3 rad; 1,57 rad.

2 **a)** Hány fokos az a hegyesszög, amelynek a tangense: 94,5; 29,2; 8,4; 3,2; 1; 0,28?

b) Hány radián nagyságú az a hegyesszög, amelynek a tangense: 1000; 59,7; 4,4; 1,2; 1; 0,28?

3 Az egyik csillagász egy galaxis távolságát 15,047 fényévnek mérte, míg egy másik csillagász ugyanennek a galaxisnak a távolságát 15,046 fényévnek. A két mérést a „sok tizedesjegy miatt" pontosnak érezzük. Vajon hány km eltérés van közöttük? (A fény 1 másodperc alatt 300 000 km-t tesz meg.)

4 Egy téglalap alakú kert átlója 40°-os szöget zár be a kert 25 méter hosszú oldalával. Mekkora lehet a kert területe, ha a szög mérése során 39,5° és 40,5° is előfordult?

5 Megmértük, hogy egy magas hegytetőn álló kilátó teteje mekkora emelkedési szögben látható. A mérések 26° és 28° közötti eredményeket adtak. Térképen megmértük, hogy a hegycsúcs és a mi helyzetünk távolsága éppen 1 cm, ami a valóságban 1 km-nek felel meg. (Ezen a térképen nem szerepel a hegycsúcs tengerszint feletti magassága.)

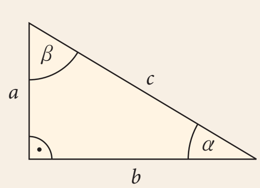
a) Milyen magasan lehet a hegycsúcs a mérést végző személy szintje felett?

b) Változtat-e a válaszod „pontosságán", ha nem a hegytetőn álló kilátó tetejére vonatkozó szög szerepel adatként, hanem a hegy „valódi csúcsa"? Érvelj az állításod mellett!

c) „Pontosabb" lesz-e ennek a mérésnek az eredménye, ha megmondjuk, hogy a mérésünk során a talajtól körülbelül 1,7 m magasságban tartottuk a szögmérő eszközt?

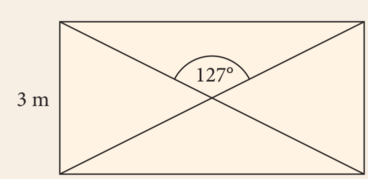
HÁZI FELADAT

1 Készíts táblázatot a füzetedben, és töltsd ki az ábra alapján! Az oldalak hosszát cm-ben adtuk meg.



	a	b	c	α	β
1. háromszög		5,8		25,4°	
2. háromszög	12,3				72,1°
3. háromszög	2	5			
4. háromszög		12	13		

2 Téglalap alakú virágoskertet az átlóival négy részre osztottunk az ábra szerint.



a) Mekkorák a téglalap ismeretlen oldalai?

b) Mekkora egy-egy rész területe?

c) Mekkorák a téglalap átlói?

3 Milyen hosszú az árnyékod, amikor a napsugarak **a)** 57°-os; **b)** 45°-os; **c)** 37°-os; **d)** 20°-os szöget zárnak be a vízszintes talajjal?

A függvénytáblázat használata

A számológépek megjelenése kiszorította azokat a táblázatokat, amelyeket több évszázados munkával állítottak össze matematikusok, csillagászok, „megszállottak”. A hatalmas munka eredménye ma egy apró szerkezetbe van zárva, a kért értékek „gombnyomásra” megjeleníthetők. Sőt, olyan pontossággal írja ki a számológép az eredményeket, amelyről a táblázatok készítői álmodni sem mertek.

Szögek tangense

tg 0°–45°

tg	0’	6’	12’	18’	24’	30’	36’	42’	48’	54’	60’
0°	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349
2°	0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	0524
3°	0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	0699
4°	0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	0875
5°	0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	1051
6°	1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	1228
7°	1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	1405
8°	1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	1584
9°	1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	1763
10°	1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	1944
11°	1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	2126
12°	2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	2309
13°	2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	2493
14°	2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	2679
15°	2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	2867
16°	2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3057

1 Hogyan határozható meg a táblázat segítségével például tg 14° 24′?
Igen egyszerűen, ahogyan azt a rajz segítségével könnyen leolvashatjuk: 0,2568. Természetesen ez egy négy tizedesjegyre kerekített érték, ahogyan azt a függvénytáblázat neve (Négyjegyű függvénytáblázatok) is sugallja.

2 Melyik hegyesszög tangense a 0,1370? Ezt is könnyen leolvashatjuk: 7° 48′ = 7,8°.

3 Ha olyan szöget keresünk, amely nem olvasható le a táblázatból, akkor *közelítéssel* tudjuk csak megadni az eredményt.
Például: Mennyi tg 11,55°?

Megoldás

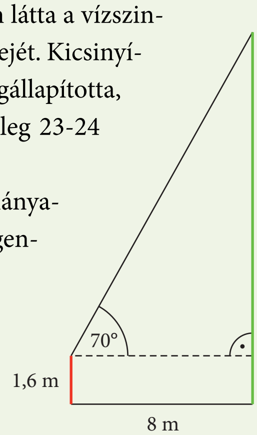
11,55° = 11° 33′. A táblázatból látjuk, hogy tg 11° 30′ = 0,2035 és tg 11° 36′ = 0,2053.
Amíg a szög 6′-et nő, addig a tangense 0,2053 − 0,2035 = 0,0018-del növekszik. Egy szögpercnövekedésre ezért (ha egyenletesnek képzeljük a növekedést) 0,0018 : 6 = 0,0003 növekedés „jut”. Így 3′ növekedésre 0,0003 · 3 = 0,0009 növekedés jut. Ezért tg 11° 33′ = tg 11,55° = 0,2035 + 0,0009 = 0,2044. A számológépünk által kijelzett tg 11,55°-ot négy tizedesjegyre kerekítve az előbb kiszámított értéket kapjuk.
A leírt közelítő eljárást *lineáris interpolációnak* nevezik. Ennek jelentését csak a *tangensfüggvény* megismerése után érdemes kutatni.

69 RÉGI FELADATOK MÁSKÉPP

FELADAT

Most, hogy ismerjük a hegyesszögek tangensét, érdemes elővennünk néhány korábbi leckéből azokat a feladatokat, amelyeket ott csak méréssel tudtunk megoldani, és azokat is, amelyeket most, más oldalról közelítve, tartalmasabbá tehetünk.

1 Az 57. lecke 2. feladatában arra voltunk kíváncsiak, milyen magas a Gyöngyszálló.
8 méter távolságból és 1,6 méter szemmagasságból 70°-os emelkedési szögben látta a vízszinteshez képest a szálloda tetejét. Kicsinyített ábrát szerkesztve megállapította, hogy ez az épület közelítőleg 23-24 méteres.



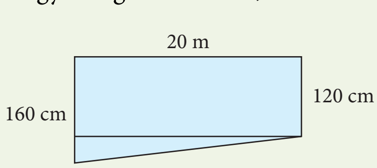
a) Melyik két hosszúság hányadosa a 70°-os szög tangense?

b) Hány deciméteres a szállodának a szemmagasság fölötti része?

c) Add meg a Gyöngyszálló magasságát dm pontossággal!

2 Oldd meg a 65°-os szög tangensének felhasználásával az 57. lecke 2. c) házi feladatát:
Milyen magas a Kristályszálló, ha 12 méter távolságból és 1,6 méter szemmagasságból 65°-os emelkedési szögben látjuk a vízszinteshez képest a szálloda tetejét?

3 Foglalkozz a Lovarda tervrajzáról szóló Ráadás lecke (40. oldal) 3. feladatával!
A Lovarda feszített víztükrű gyógyvizes úszómedencéje 20 m hosszú, 13 m széles, a mélysége az egyik végénél 120 cm, a másiknál 160 cm, közben egyenletesen mélyül.



a) A medence két oldallapja trapéz. Mekkorák ennek a szögei?

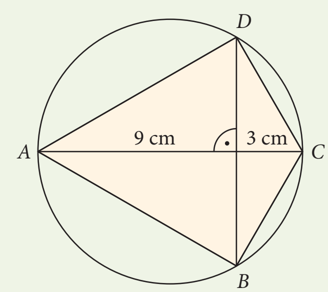
b) Milyen meredekségű, milyen szögű lejtő képezi a medence alját?

4 Egy korábbi házi feladatban azt vizsgáltuk,

a) mekkora a *BD* húr,

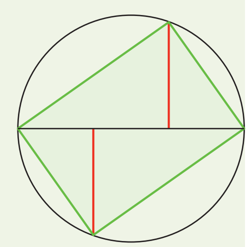
b) mekkora az *ABCD* deltoid kerülete és területe,

ha a kör *AC* átmérőjét a rá merőleges *BD* egyenes egy 9 cm-es és egy 3 cm-es szakaszra osztja.



Most számítsd ki ennek a deltoidnak a szögeit!

5 Láttuk, hogy az ácsok így faragják egy henger alakú fatörzsből a legszilárdabb gerendát:



a keresztmetszet egyik átmérőjét három egyenlő részre osztják, majd a két osztópontban, az ábra szerint, merőlegest állítanak az átmérőre. Ezeknek a merőlegeseknek a körrel való metszéspontjai és az eredeti átmérő végpontjai egy téglalapot határoznak meg. Ez lesz a legszilárdabb gerenda keresztmetszete. Kiszámítottuk, hogy ha a henger keresztmetszete 24 cm átmérőjű kör, akkor a téglalap oldalai közelítőleg 19,6 cm, illetve 13,9 cm hosszúságúak.

a) Mekkora szögeket alkot a téglalap átlója az oldalaival?

b) Melyik hosszúságméretek szükségesek ahhoz, hogy ezeket a szögeket kiszámítsuk?

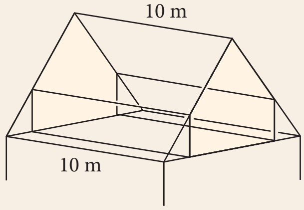
HÁZI FELADAT

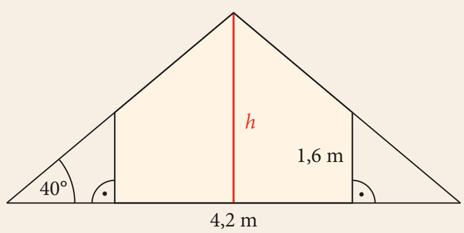
1 Add meg négy tizedesjegyre kerekítve a következő szögek tangensét!
22,8°; 0,8 rad; 79,2°; 1,17 rad

2 Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 32°, és az átfogóhoz tartozó magasság hossza 24 mm.

a) Készíts ábrát!
b) Számold ki a befogók átfogóra eső vetületeinek hosszát!
c) Mekkorák a háromszög oldalai?

3 Tetőtér-beépítési terv vázlata látható a mellékelt rajzon. A tető alatt beépítendő tér ötszög keresztmetszetű, a legalacsonyabb falmagasság 1,6 m, a helyiség szélessége pedig 4,2 méter. A tető síkja a vízszintes síkkal mindkét oldalon 40°-os szöget zár be.

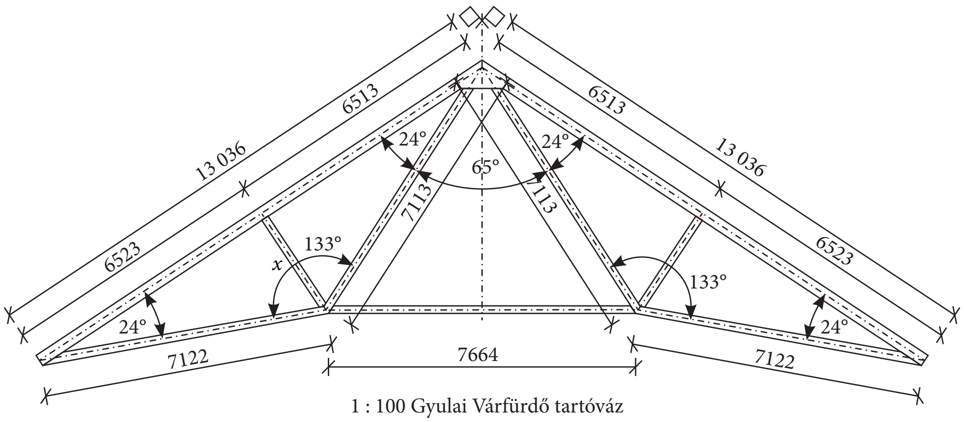




a) Milyen széles a tető alapja?
b) Milyen magas a tető (h)?
c) Mekkora az ötszög alakú keresztmetszet területe?
d) Hány légköbméteres lesz a beépített rész, ha a ház hossza 10 m?

RÁADÁS

1 A Lovarda tervrajzán középen olyan egyenlő szárú háromszöget látunk, amelynek ismerjük az oldalhosszúságait és a szárszögét. Összhangban vannak-e ezek az adatok?



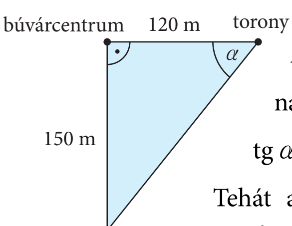
1 : 100 Gyulai Várfürdő tartóváz
Fajzi Építészeti Stúdió, Békéscsaba

2 Számítsd ki Pitagorasz tételével is és a 24°-os szög tangensének felhasználásával is, mekkora a fenti tervrajzon az x szakasz!

70 TANGENS A TENGEREN

BEVEZETŐ

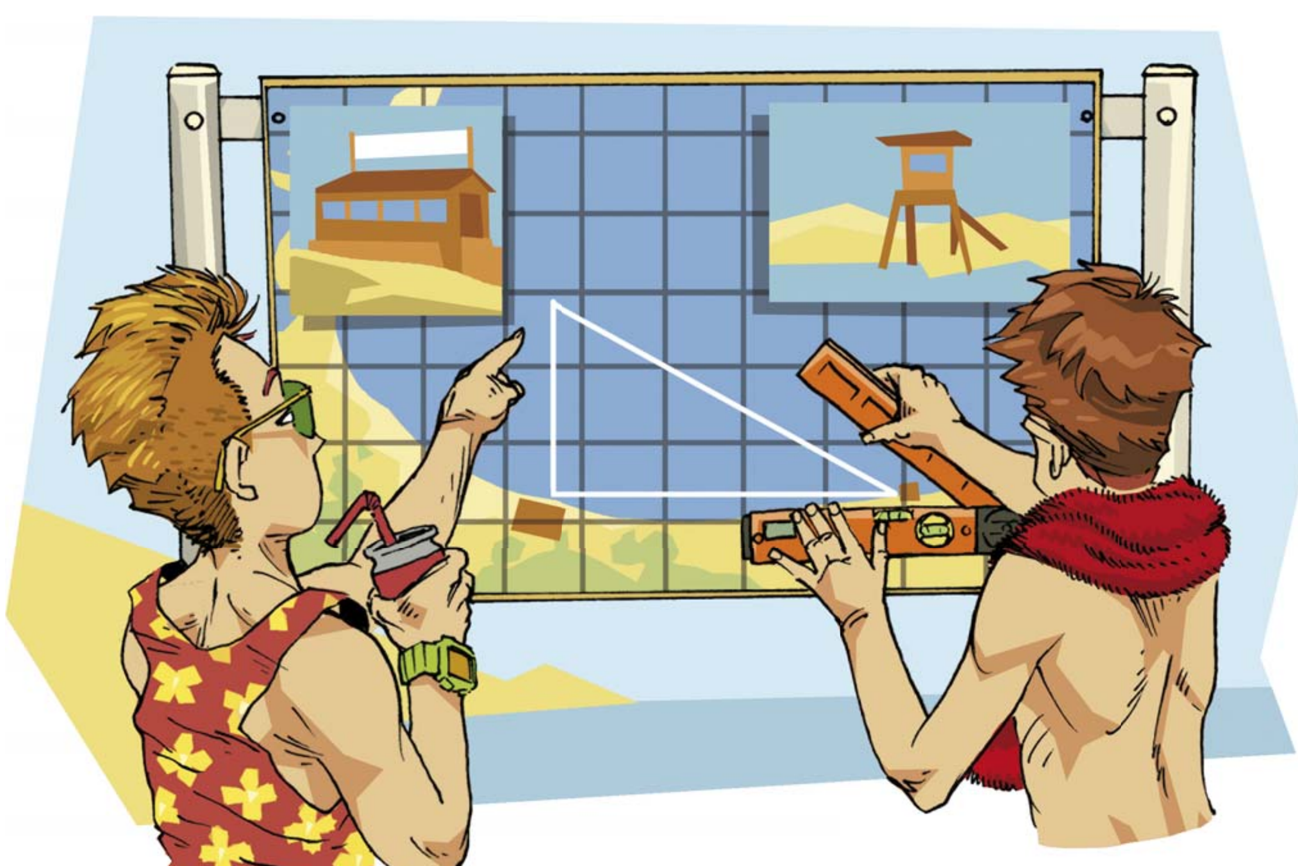
Ne ússzatok 150 m-nél messzebb a parttól! – ezzel a kéréssel engedtek el három fiút, Bencét, Döncit és Jocót a tengerhez.
De honnan lehet tudni, hogy milyen távol vagyunk a parttól?
Egy szögmérő segíthet a feladat megoldásában.



A három fiú a tengerparton megmérte a búvárcentrum bejárata és a vízimentők tornya közötti távolságot. Ez közelítőleg 120 méter. Ezután kiszámították, mekkora az α szög, ha a búvárcentrumnál úsznak be 150 m-nyit, merőlegesen a tengerpartra.

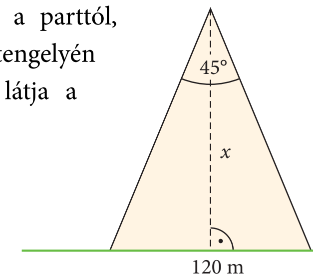
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{150}{120} = 1{,}25; \quad \alpha \approx 51°.$$

Tehát amikor a toronynál üldögélő Jocó szögmérője ezt a szöget mutatja, akkor éri el Bence a 150 méteres távolságot. Amikor még közelebb van a parthoz, akkor Jocó 51°-nál kisebb szöget mér. Megegyeztek, hogy Jocó egy piros törülközőt tűz ki, amikor Bence túlmegy az előírt határon.



KIDOLGOZOTT FELADAT

Milyen messze van Bence a parttól, ha az ábra szimmetriatengelyén úszik, és 45°-os szögben látja a 120 m-es szakaszt?



Megoldás

Olyan derékszögű háromszöget látunk, amelynek az egyik hegyesszöge 45° : 2 = 22,5°, és a szöggel szemközti befogója 60 m-es.

Felírhatjuk:

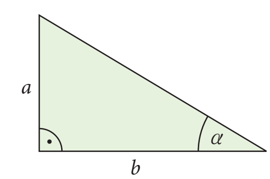
$\mathrm{tg}\,22{,}5° = \dfrac{60}{x}$; $\quad 0{,}414 = \dfrac{60}{x}$; $\quad x = 60 : 0{,}414 = 145.$

Tehát Bence 145 méter messze van a parttól.

Most ismertük a 22,5°-os szöggel szemközti befogót, és a szög melletti befogó hosszát kerestük.

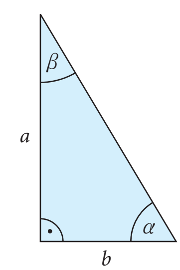
ELMÉLET

Ha egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge α, akkor a mellette lévő befogó és a vele szemben lévő befogó hosszúságának a hányadosát az α **kotangensének** nevezzük. Az ábrának megfelelő jelöléssel: $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$.



Például

a példában $\mathrm{ctg}\,22{,}5° = \dfrac{x}{60}$; $\quad x = 60 \cdot \mathrm{ctg}\,22{,}5°$.



A rajzról leolvashatjuk:

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\beta$, $\quad$ vagyis

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,(90° - \alpha)$ $\quad$ és $\quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$.

FELADAT

1 Számológéped segítségével számítsd ki a 10°-os, a 20°-os, a 30°-os, a 40°-os, az 50°-os, a 60°-os, a 70°-os és a 80°-os szög kotangensét!

2 Dönci a búvárcentrum bejárata és a vízimentők tornya közötti 120 méteres szakasznak

a) a felezőpontjából,

b) a toronyhoz közelebbi harmadolópontjából,

c) a búvárcentrumhoz közelebbi harmadolópontjából

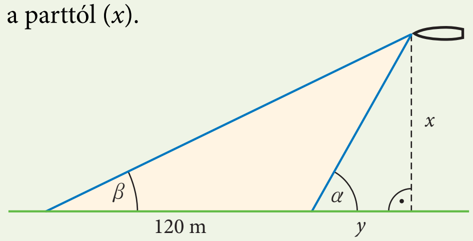
úszott be a tengerbe, a partra merőlegesen, de először kiszámította, hány fokos szöget mér az 51°-os helyett Jocó, amikor ő eléri a 150 métert.

Dönci számításainak eredménye:

a) 68°; b) 75°; c) 62°.

Készíts rajzokat, ellenőrizd Dönci eredményeit!

3 Egy hajó áll a tengeren. Jocó komoly mérésre készül: ki akarja számítani, hány méterre van a hajó a parttól (x).



Barátai is részt vesznek a munkában. A parton kimért 120 m-es távolság két végén mindhárman megmérik az α és a β szöget Jocó digitális szögmérőjével. Az α szöget 72, 73, 77 fokosnak mérik, ezek helyett az átlagukat használják a feladat megoldására: $\alpha = 74°$.

A β szöget 53, 51, 52 fokosnak mérik, ezek helyett az átlagukat használják a feladat megoldására: $\beta = 52°$.

a) Írd fel tg α-t és tg β-t x-szel és y-nal kifejezve! Egy elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszert kapsz.

b) Küszöböld ki az x-et! Számítsd ki az y-t a kapott egyenletből!

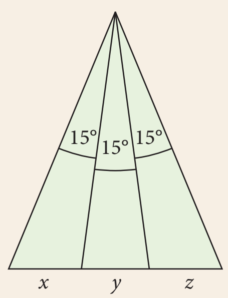
c) Mekkora az x?

d) Hány méterre van a hajó a parttól?

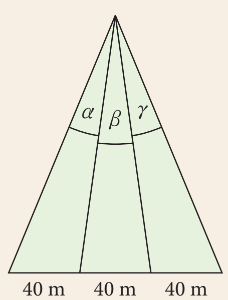
Lapozz vissza az 58. leckéhez! Ott rajzolással, hasonlósági számításokkal egy ehhez nagyon hasonló feladatot oldottunk meg.

HÁZI FELADAT

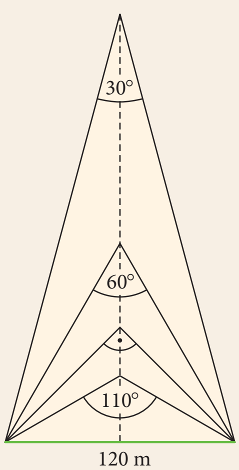
1 Egy egyenlő szárú háromszög szárszöge 3 db 15°-os szögre van bontva. A szögszárak x, y és z részre osztják a 120 m-es alapot. Mekkora az x, az y és a z hosszúságú szakasz?



2 Egy egyenlő szárú háromszög 45°-os szárszöge α, β és γ szögre van bontva. A szögszárak 40 m-es részekre osztják a 120 m-es alapot. Mekkora α, β és γ?



3 Milyen messze van a parttól a tengerben az, aki az ábra szimmetriatengelyén úszik, és 30°-os, 60°-os, 90°-os, 110°-os szögben látja a parton lévő 120 m-es szakaszt?



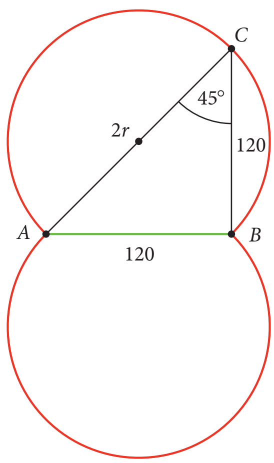
RÁADÁS

Jocó ki akarta számítani, hány métert ússzon be a 120 méter hosszú szakasz harmadolópontjánál a partra merőlegesen a tengerbe, hogy onnan 45°-os szögben lássa a szakaszt.

Megoldás

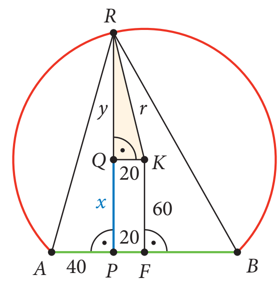
A kerületi szögeknél említettük a **látókörívek**et. Azok a pontok, amelyekből az AB szakasz 45°-os szögben látszik, az ábra szerinti két látókörív pontjai. A körök sugarát az *ABC* derékszögű háromszögből kiszámítja:

$2r = 120\sqrt{2}$, $r = 60\sqrt{2} \approx 85$ (méter).



Mi tehát Jocó feladata?

Egy $r = 60\sqrt{2}$ m sugarú kör 120 m-es húrjának az egyik harmadolópontjában (*P*) merőlegest állít a húrra, ez metszi a kört (*R*). Ennek a metszéspontnak a húrtól való távolságát (*PR*) kell kiszámítania, vagyis egy háromszög (*ABR*) magasságát.



Ennek a magasságnak az egyik része (*PQ*), amit *x*-szel jelölt, akkora, mint a kör középpontjának (*K*) a távolsága a húrtól (*KF*). Látja, hogy ez éppen 60 m (mert a *KFB* háromszög egyenlő szárú).

A másik rész (*QR*), aminek a hosszát *y*-nal jelölte, egy olyan derékszögű háromszög befogója, amelynek a másik befogója 20 m, az átfogója pedig a kör sugara ($RK = r$).

$y^2 + 20^2 = r^2$; $y^2 = r^2 - 20^2 = 60^2 \cdot 2 - 400 = 6800$.

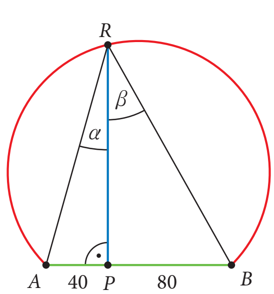
Tehát $y \approx 82$, a két rész összege pedig

$x + y \approx 60 + 82 = 142$.

Tehát 142 méterre kell beúszni a harmadolópontnál, hogy 45°-os szögben lássa a 120 m-es szakaszt.

FELADAT

1 Melyik két hegyesszögre teljesül, hogy összegük 45°, és az egyik szög tangense éppen kétszerese a másik szög tangensének?



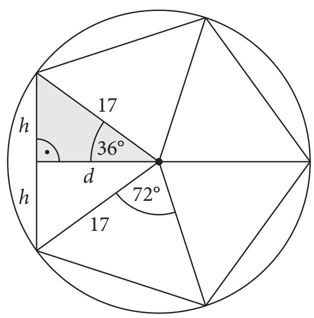
2 Egy egyenlőszárú háromszög szárszöge 70°, alapja 7 cm. A 70°-os szöget három olyan részre bontjuk, hogy az első résznek kétszerese a második (középső) rész, és ennek kétszerese a harmadik rész. Mekkora részekre bontják a szögek szárai az alapot?

71 HEGYESSZÖG SZINUSZA, KOSZINUSZA

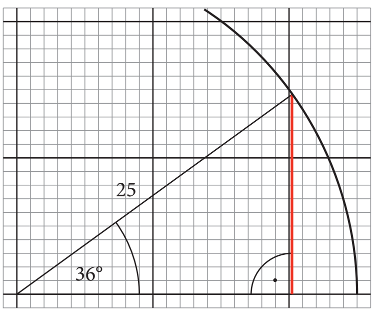
BEVEZETŐ

Legkevesebb mekkora területű hulladék keletkezik, ha egy 17 cm sugarú körből szabályos ötszöget vágunk ki?

Megoldás



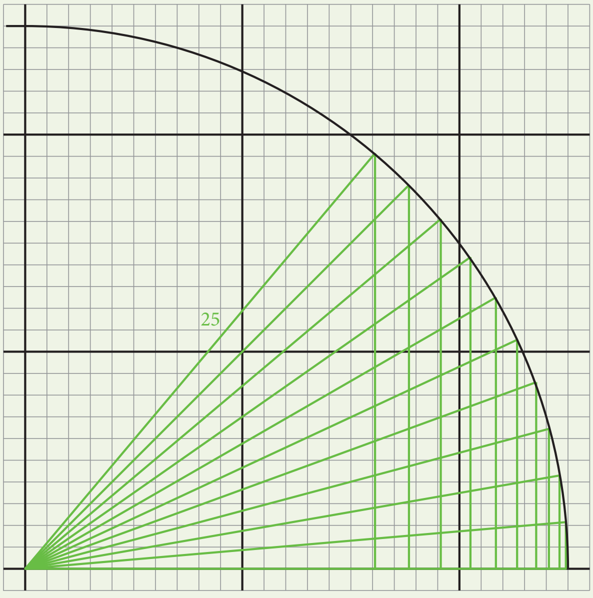
A megoldás terve egyszerű: a kör területéből ki kell vonni a körbe írt szabályos ötszög területét.
A kör területe:
$17^2\pi \approx 908$ (cm^2).
Az ötszög területe a sötétített háromszög területének éppen a tízszerese. A derékszögű háromszög területe $\frac{1}{2}dh$, az ötszög területe ezért $5dh$ (d-t és h-t cm-ben mérjük). Csakhogy mennyi a d, és mennyi a h?
Rajzoljunk milliméterpapíron a sötétített derékszögű háromszöghöz hasonlót, amelynek az átfogója (például) 25 mm, az egyik hegyesszöge pedig 36°-os!
Rajzunkon a 36°-os szöggel szemben megközelítőleg 15 mm, a szög mellett pedig 20 mm hosszú befogó van.



Ez azt jelenti, hogy a 36°-os szöggel szemközti befogó és az átfogó hosszának aránya közelítőleg $15 : 25 = 0{,}6$, a szög melletti befogó és az átfogó aránya pedig $20 : 25 = 0{,}8$.
Ez minden olyan derékszögű háromszögben igaz, amelynek van 36°-os hegyesszöge, hiszen ezek a derékszögű háromszögek mindannyian hasonlók egymáshoz. (Tudjuk, hogy a nagyított háromszögben az oldalak aránya ugyanannyi, mint az eredeti oldalaké.)
A 17 cm átfogójú derékszögű háromszögben tehát
$h : 17 \approx 0{,}6$, és $d : 17 \approx 0{,}8$.
Ebből $h \approx 17 \cdot 0{,}6 = 10{,}2$ és $d \approx 17 \cdot 0{,}8 = 13{,}6$.
A szabályos ötszög területe így közelítőleg:
$5dh \approx 694$ (cm^2).
A hulladék területe közelítőleg:
$908 - 694 = 214$ (cm^2).

FELADAT

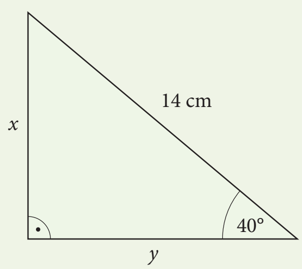
1. További olyan derékszögű háromszögeket rajzoltunk milliméterpapírra, amelyeknek szintén 25 mm az átfogójuk. Olvasd le a két befogó hosszát, és mindkét befogó esetén számítsd ki a befogó és az átfogó arányát! Töltsd ki a táblázatot a füzetedben!
(Számíts rá, hogy a leolvasásod pontatlan!)

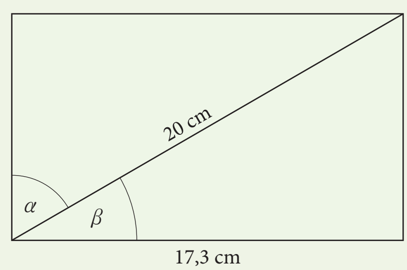


Hegyesszög	Szöggel szemközti befogó (mm)	Szög melletti befogó (mm)	Átfogó (mm)	Szöggel szemközti befogó és átfogó aránya	Szög melletti befogó és átfogó aránya
5°	2	25	25	0,08	1
10°	4,5	24,5	25	0,18	0,98
15°			25		
20°		23,5	25		
25°			25		
30°	12,5	21,6	25		
35°			25		
40°	16		25		
45°	17,5	17,5	25	0,7	0,7
50°		16	25		

2 Az előző feladatban készített táblázat felhasználásával válaszolj a következő kérdésekre!

a) Egy derékszögű háromszög egyik szöge 40°-os, az átfogója 14 cm hosszú. Mekkorák a befogói?

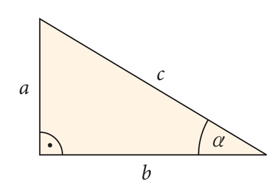




b) Egy téglalap átlója 20 cm, egyik oldala 17,3 cm hosszúságú. Hány fokos szöget alkot az átló az oldalakkal?

ELMÉLET

1. Definíció: Ha egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge α, akkor
- a vele szemben lévő befogó és az átfogó hosszúságának a hányadosát az α **szinuszának** nevezzük,
- a mellette lévő befogó és az átfogó hosszúságának a hányadosát az α **koszinuszának** nevezzük.



Az ábrának megfelelő jelöléssel: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

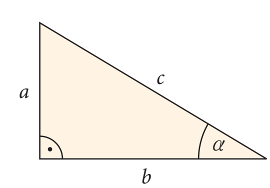
Például

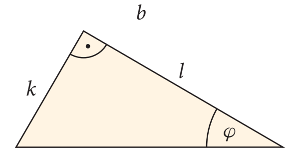
a bevezető feladatban azt kaptuk, hogy $\sin 36° \approx 0{,}6$ és $\cos 36° \approx 0{,}8$.

2. A szinuszt, a koszinuszt, a tangenst és a kotangenst közös néven **szögfüggvényeknek** nevezzük.

Az ábra szerinti derékszögű háromszögekben:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$	$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$
$\sin\varphi = \frac{k}{m}$	$\cos\varphi = \frac{l}{m}$	$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k}{l}$	$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{l}{k}$





FELADAT

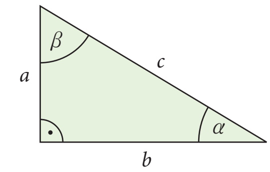
3 500 m hosszú egyenes út vezet fel a turistaháztól a hegycsúcsra. Az út a vízszintessel közelítőleg 15°-os szöget zár be.

a) Mekkora szintkülönbség van a kiindulási és érkezési hely között?

b) Mekkora távolságot mérhetünk a kiindulási helyünket jelző pont és a hegycsúcsot jelző pont között az 1 : 8000 arányú turistatérképen?

ELMÉLET

A szögfüggvények tulajdonságai:



1. Az ábra szerinti jelölésekkel:

$\sin\beta = \dfrac{b}{c} = \cos\alpha$ és

$\cos\beta = \dfrac{a}{c} = \sin\alpha.$

Másképp:

– minden hegyesszög szinusza egyenlő a pótszögének a koszinuszával;

– minden hegyesszög koszinusza egyenlő a pótszögének a szinuszával.

Jelekkel:

ha α hegyesszög, akkor $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ és $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$.

Például: $\sin 40° = \cos 50°$, $\cos 35° = \sin 55°$.

Emlékezzünk!

Hasonló kapcsolatot láttunk egy hegyesszög tangense és a pótszögének a kotangense között az előző leckében.

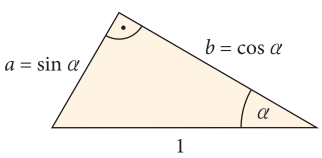
2. Az ábra szerinti jelölésekkel:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$$

Az α hegyesszögre tehát teljesül:

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, illetve $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

3. Helyezzük most el az α hegyesszöget olyan derékszögű háromszögben, amelynek az átfogója 1 egység. Ekkor



– $\sin\alpha = \dfrac{a}{1}$, *ezért* $\sin\alpha = a$, *azaz az* α*-val szemközti befogó hossza éppen* $\sin\alpha$,

– $\cos\alpha = \dfrac{b}{1}$, *ezért* $\cos\alpha = b$, *azaz az* α *melletti befogó hossza pedig éppen* $\cos\alpha$.

Ha erre a derékszögű háromszögre felírjuk a Pitagorasz-tételt, azt kapjuk, hogy $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1.$

Vagy másféle, gyakrabban használt jelöléssel:

$\mathbf{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.}$

Ennek az összefüggésnek a segítségével egy hegyesszög szinuszának ismeretében könnyen kiszámíthatjuk a szög koszinuszát, vagy a koszinusz ismeretében a szög szinuszát.

Például

ha $\sin\alpha = 0{,}74$, akkor $\cos\alpha = \sqrt{1 - 0{,}74^2} = \sqrt{0{,}4524} \approx 0{,}67.$

FELADAT

4 Az 1. feladat táblázata és a pótszögek szinuszáról, koszinuszáról mondottak alapján egészítsd ki a füzetedben!

sin 35° = …; cos 50° = …; … 60° = 0,86;
sin 75° = …; cos 80° = …; … 60° = 0,5.

5 Mennyi $\sin^2 37° + \sin 37° - \cos 53° + \sin^2 53°$? Számológép nélkül is sikerül?

HÁZI FELADAT

1 Egy derékszögű háromszög rövidebb befogója 1,8 cm, átfogója 4,7 cm. Határozd meg a háromszög hegyesszögeinek szinuszát, koszinuszát, tangensét és kotangensét!

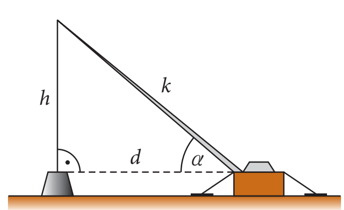
2 Egy derékszögű háromszög átfogójának hossza 25 cm, az egyik hegyesszöge 35°-os. Mekkorák a háromszög befogói, és mekkora az átfogóhoz tartozó magassága?

3 Egy 20 cm sugarú körből szabályos kilencszöget vágunk ki. Legkevesebb hány cm^2 területű hulladék keletkezik?
Alkalmazd az óra bevezető feladatának gondolatmenetét, és használd az 1. feladatának táblázatát!

4 Magyarázd meg, miért nincs olyan hegyesszög, amelynek a szinusza vagy a koszinusza nagyobb 1-nél!

RÁADÁS

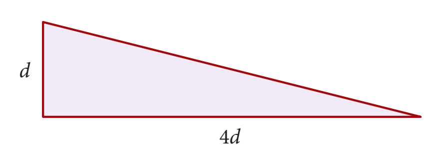
1 Egy emelődaru teleszkópos karjának (gémnek) a hossza (k) 4 m és 12 m között változhat, a karnak a vízszintessel bezárt szöge (α) pedig 10° és 60° között állítható be.



a) Legfeljebb mekkora távolságra (d) lehet a darutól a felemelendő tárgy?
b) Mekkora távolságra van a darutól az a legközelebbi tárgy, amelyet a daru fel tud emelni?
c) Legfeljebb mekkora magasságba (h) lehet ezzel a daruval felemelni a tárgyakat?
d) Mekkora magasságba emelheti a tárgyat a daru, ha a gém a legrövidebb állásban van?

2 Egy hegyesszög szinusza 0,55. A szög meghatározása nélkül számold ki a szög koszinuszát és tangensét!

3 Egy hegyesszög tangense 4. A szög meghatározása nélkül számold ki a szög szinuszát és koszinuszát!



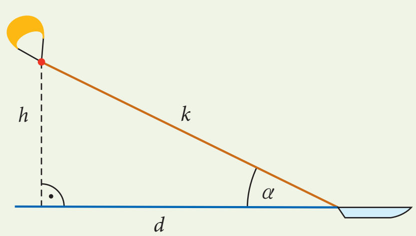
4 Egy szabályos tizenkétszög oldalai 3,8 cm hosszúak.
a) Mekkora a köré írható kör sugara?
b) Mekkora a beírható kör sugara?
c) Mekkora a tizenkétszög területe?

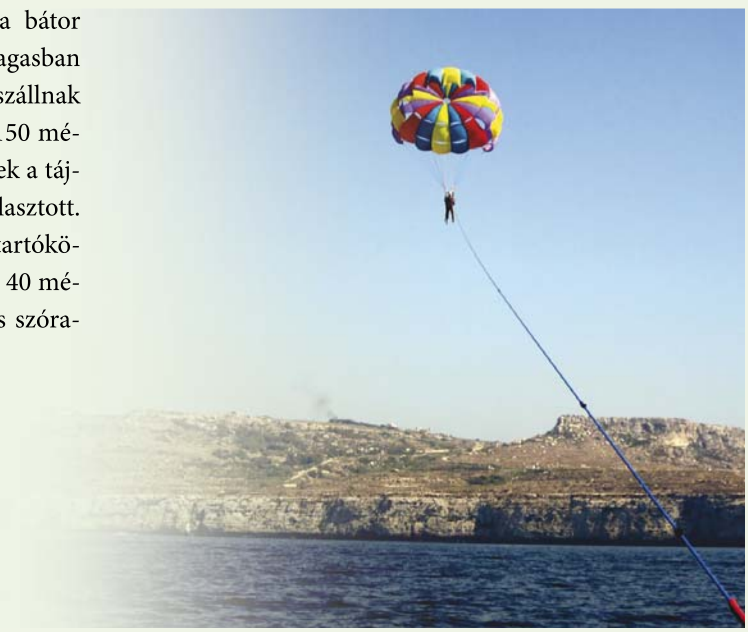
72 GYAKORLÁS

FELADAT

A feladatok megoldásához használj számológépet! A szögek szinuszát és koszinuszát a sin, illetve a cos gomb segítségével írathatod ki a számológép kijelzőjére. Ügyelj a szögek tangensének meghatározásánál mondottakra is (D vagy R állásban van-e a géped)!

1 A tengerparton mindenki megcsodálja a bátor siklóernyősöket, akik 50–100 méter magasban siklanak a tenger felett. Motorcsónakról szállnak fel, kívánságuk szerint 20, 100 vagy akár 150 méteres feszítőkötél végéről gyönyörködhetnek a tájban. Egy fiatal pár kétüléses siklóernyőt választott. Azt kérték, hogy először 60 m-es legyen a tartókötél, azután, ha intenek, engedjenek rá még 40 métert. (Ennek a motorcsónakos-siklóernyős szórakozásnak az angol neve *parasailing*.)





a) Milyen magasban repültek, és vízszintes irányban mérve mekkora távolságra kerültek a motorcsónaktól? Töltsd ki a táblázatot a füzetedben!

	A kötél hossza 60 méter			A kötél hossza 100 méter		
a	35°	48°	69°	35°	48°	69°
magasság (*h*)						
távolság (*d*)						

b) Milyen hosszú a tartókötél? Töltsd ki a táblázatot a füzetedben!

	A magasság 20 méter			A magasság 50 méter		
a	35°	48°	69°	35°	48°	69°
kötélhossz (*k*)						
távolság (*d*)						

c) Mikor szállt magasabban a fiatal pár, amikor 80 méteres volt a kötél, és 35°-os a szög, vagy amikor 50 méteres volt a kötél, és 58°-os a szög ?

2 Egy Spanyolországról szóló útikönyvben olvastuk: „A Montserrat hegységben van a világ legmeredekebb függővasútja. Emelkedése 82°-os, hossza 680 méter, és útja során 535 méter szintkülönbséget győz le."

a) Készíts rajzot!

b) Mutasd meg, hogy ezek az adatok nincsenek összhangban egymással! Mi lehet a magyarázat?

HÁZI FELADAT

1 Egy építkezéshez platós kisteherautóval több talicskát visznek. A 0,5 m magas platóhoz egy körülbelül 2 m hosszú pallót támasztottak, hogy azon tolják fel a talicskákat. Körülbelül mekkora szöget zár be a palló a vízszintessel?

2 *„Az 1987. óta az UNESCO világörökségi védettsége alatt álló Budavári Siklót gróf Széchenyi István fiának, Széchenyi Ödönnek a kezdeményezésére építették. … Alsó, Duna felőli állomása a Széchenyi Lánchíd budai hídfőjénél, az Alagút Duna-parti torkolata közelében van, a felső pedig a budavári palota és a Sándor-palota között. A pálya hosszúsága 95 méter. Az alsó és felső állomás közti szintkülönbség mintegy 50 méter."* (Wikipédia, részlet)

Mekkora szöget zár be a vízszintes síkkal a sikló pályája?

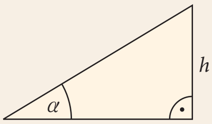
3 Folytasd a lecke 2. feladatát!

a) Mekkora lenne a függővasút emelkedési szöge, ha egyenletes emelkedéssel érné el 680 méteres úton az 535 méteres emelkedést?

b) Mekkora utat tenne meg a függővasút, ha 82°-os egyenletes emelkedéssel 535 méter szintkülönbséget győzne le?

c) Mekkora szintkülönbséget győzne le a függővasút, ha 82°-os egyenletes emelkedéssel haladna 680 méteres úton?

4 Hány méteres kötél esetén érik el a lecke 1. feladatában szereplő siklóernyősök a h méteres magasságot α szög mellett, ha



a) $h = 20$ és $\alpha = 25°$;

b) $h = 40$ és $\alpha = 25°$;

c) $h = 40$ és $\alpha = 35°$;

d) $h = 45$ és $\alpha = 0{,}7$ rad?

73 HOSSZÚSÁGOK ÉS SZÖGEK KISZÁMÍTÁSA

BEVEZETŐ

A hegyesszögek szögfüggvényeinek megismerésével alaposan megnőtt azoknak a matematikai és hétköznapi feladatoknak a száma, amelyeket már meg tudunk oldani. Hosszúságok és szögek ismeretében újabb hosszúságokat és szögeket tudunk kiszámítani. Ehhez „csupán” meg kell találni, vagy meg kell alkotni azt a derékszögű háromszöget, amelyben valamelyik hegyesszöget vagy annak valamelyik szögfüggvényét ismerjük, és még távolságokat is tudunk.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 12 cm hosszú, a háromszög szárához tartozó magasság 10,8 cm.

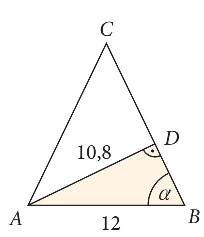
a) Mekkorák a háromszög szögei?

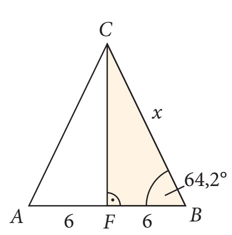
b) Mekkorák a háromszög szárai?

Megoldás

a) Az ABD derékszögű háromszögben az α hegyesszöggel szemben fekvő AD befogó és az AB átfogó hosszát is ismerjük. Ebből arra következtetünk, hogy $\sin\alpha = \frac{10{,}8}{12} = 0{,}9$. Számológéppel kapjuk: $\alpha \approx 64{,}2°$.

Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő két szöge egyenlő, ezért a szárszöge:
$ACB\sphericalangle = 180° - 2 \cdot 64{,}2° = 51{,}6°$.





b) A szárak hosszának kiszámításához másik derékszögű háromszöget választunk: megrajzoljuk az alaphoz tartozó magasságot (ez felezi az alapot). A BFC derékszögű háromszögben ismerjük a B-nél fekvő szöget (64,2°) és a szög melletti BF befogó hosszát (6 cm). Ezek ismeretében kell a BC átfogó hosszát (x cm) kiszámítanunk.

$\cos 64{,}2° = \frac{6}{x}$.

Ebből $x \cdot \cos 64{,}2° = 6$, vagyis $x = \frac{6}{\cos 64{,}2°}$.

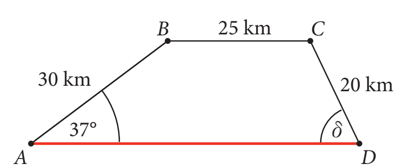
Számológéppel kapjuk, hogy $x \approx 13{,}8$.

A háromszög szárai közelítőleg 13,8 cm hosszúak.

Megjegyzés

- A b) feladat megoldásában használhattuk volna a BFC derékszögű háromszög C csúcsánál fekvő szöget is (25,8°).
- Használhattuk volna az ABD és CFB háromszögek hasonlóságát is a megoldás során.

2. Az A településről eddig csak a B és a C településen keresztül lehetett eljutni a D településre az ábra szerint. A BC út párhuzamos a tervezett új AD úttal.



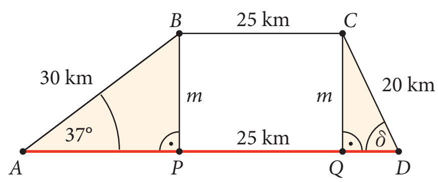
a) Hány km-rel rövidebb az új út, mint az eredeti $A - B - C - D$ útvonal?

b) A-ból és D-ből egyszerre kezdik el megépíteni az új utat. Mekkora legyen a $CDA\sphericalangle$?

Megoldás

A két kérdésre a választ együttesen is megadhatjuk.
Rajzoljuk meg a trapéz két magasságát az ábra szerint! Így két derékszögű háromszögre és egy téglalapra bontottuk a trapézt.

Az APB derékszögű háromszögből: $\sin 37° = \frac{m}{30}$, vagyis $m = 30 \cdot \sin 37° \approx 18{,}05 \approx 18{,}1$ (km), és így az AP szakasz hossza (Pitagorasz-tétellel, vagy a $\operatorname{ctg} 37° = \frac{AP}{m}$ összefüggésből, vagy a $\cos 37° = \frac{AP}{30}$ összefüggésből számolva) közelítőleg 24 km.



A CQD derékszögű háromszögből $\sin \delta = \frac{m}{20}$, ahonnan $\delta \approx 64{,}5°$; $QD = 20 \cdot \cos \delta \approx 8{,}6$ (km).
Az AD szakasz hossza: $24 + 25 + 8{,}6 = 57{,}6$ (km), azaz közelítőleg 58 km.

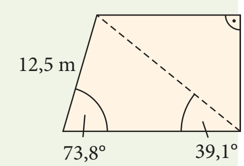
a) Az A-ból B-n és C-n keresztül D-be vezető út hossza $30 + 25 + 20 = 75$ (km), tehát az új út megépítésével körülbelül 17 km-rel rövidebb út vezet A-ból D-be.
b) Az új út megépítését D-ből úgy kell megkezdeni, hogy a $CDA\sphericalangle$ 64,5°-os legyen.

FELADAT

1 Az egyenlő szárú háromszög alapjának hossza a cm, szára b cm, az alapon fekvő szöge α, a szárszöge β. A háromszög alapjához tartozó magassága m_a cm, a szárához tartozó magassága pedig m_b cm. Készíts ábrát az adatok feltüntetésével! Töltsd ki a táblázatot a füzetedben!

	a	b	α	β	m_a	m_b
1. háromszög	18,2	21,1				
2. háromszög	29,8				17,3	
3. háromszög				57,2°		5,8
4. háromszög			78,6°		42,9	

2 Egy derékszögű trapéz alakú telek méreteit mutatja az ábra.



a) Hány méter kerítéssel lehet körbekeríteni?
b) Mekkora a telek területe?

3 Egy 18 cm sugarú körön felvettük az A és a B pontot úgy, hogy a távolságuk 30 cm legyen.
a) Mekkora az $AKB\sphericalangle$, ha K a kör középpontja?
b) Mekkora ívekre bontja a kört a két megadott pontja?
c) Mekkora az AKB körcikkek területe?

HÁZI FELADAT

1 Egy egyenlő szárú háromszög szárai
a) kétszer olyan; **b)** ugyanolyan
hosszúak, mint a háromszög alapja. Mekkorák a háromszög szögei?

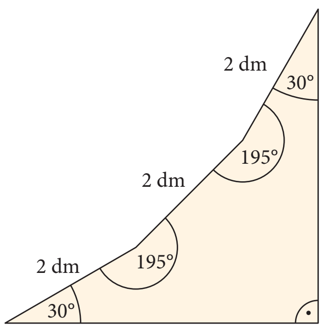
2 Egy húrtrapéz 8,4 cm hosszúságú alapján fekvő szögei 113°-osak, a trapéz magassága 10,2 cm.
a) Számítsd ki a szárak és a másik alap hosszát!
b) Számítsd ki a trapéz területét!

3 **a)** Mekkora annak a körnek a sugara, amelyben a 132,6°-os középponti szöghöz 12 cm hosszú húr tartozik?
b) Milyen messze van ez a húr a kör középpontjától:
c) Mekkora annak az egyenlőszárú háromszögnek a területe, melynek alapja ez a húr, harmadik csúcsa pedig a kör középpontja?

74 NEVEZETES SZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI

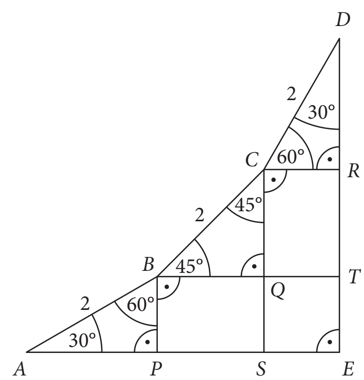
KIDOLGOZOTT FELADAT

Az ábrán látható ötszögnek két 30°-os, két 195°-os és egy 90°-os szöge van.
A három rövidebb oldal 2 dm-es. Mekkora a két hosszú oldala? Tibor otthon felejtette a számológépét, mégis megoldotta a feladatot. Hogyan?



Megoldás
Az ábra szerint részekre bontotta az ötszöget. Tibor jól ismeri az így kapott „különleges” háromszögeket. Tudja, hogy

– a 2 átfogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög befogóinak hossza $2:\sqrt{2} = \sqrt{2}$, ezért a PS szakasz hossza is és az RT szakasz hossza is $\sqrt{2}$ dm;



– ha egy derékszögű háromszög egyik szöge 30°-os, akkor a rövidebb befogó az átfogó felével egyenlő, a hosszabbik befogó pedig $\sqrt{3}$-szor akkora, mint a rövidebb, ezért SE és TE hossza 1 dm, AP és DR hossza pedig $\sqrt{3}$ dm.

Az ötszög két hosszú oldala tehát:

$AE = AP + PS + SE = \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1 \approx 4{,}15$ (dm) és
$DE = DR + RT + TE = \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1 \approx 4{,}15$ (dm).

FELADAT

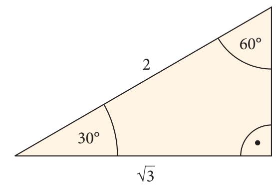
1 Töltsd ki a derékszögű háromszögre vonatkozó táblázatot a füzetedben!

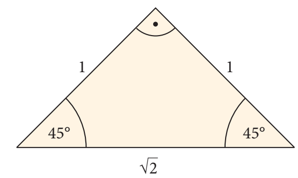
Az egyik hegyesszög	A szöggel szemközti befogó	A szög melletti befogó	Az átfogó
30°			8 cm
45°			2,3 dm
60°			32 mm
	24 mm		4,8 cm
	5 cm	5 cm	
30°		7,2 cm	
	48 mm	$16\sqrt{3}$ mm	
60°	3,24 dm		
	7 cm		$7\sqrt{2}$ cm

ELMÉLET

Nevezetes szögek szögfüggvényei

30°	$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{tg}\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\text{ctg}\, 30° = \sqrt{3}$
60°	$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\text{tg}\, 60° = \sqrt{3}$	$\text{ctg}\, 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\text{tg}\, 45° = 1$	$\text{ctg}\, 45° = 1$





FELADAT

2 Használd a nevezetes szögek szögfüggvényeinek pontos értékét! Számológép használata nélkül számítsd ki, mennyi

a) $(\sin 30° + \cos 45° - \cos 60°) \cdot \sin 45°$;

b) $\dfrac{\text{tg}\, 45° + \sin 60° - \text{ctg}\, 45°}{\cos 60°}$;

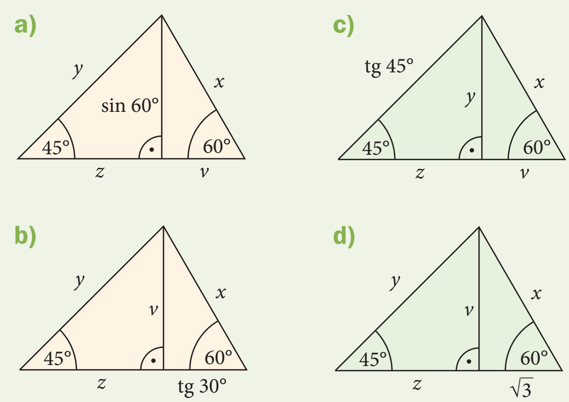
c) $\sin 30° \cdot \sin 45° \cdot \cos 30°$;

d) $\text{ctg}\, 60° \cdot \text{tg}\, 45° \cdot \text{ctg}\, 30°$!

3 Egy deltoidnak két derékszöge és egy 60°-os szöge van, a hosszabbik oldalai 4,78 cm-esek. Mekkorák az átlói, és mekkora a kerülete?

4 Ellenőrizd számítással, hogy a 30°-os, a 45°-os és a 60°-os szög esetében valóban igaz, hogy $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$!

5 Mekkorák a jelölt szakaszok? Számológép nélkül add meg a válaszaidat!



HÁZI FELADAT

1 Számológép nélkül dolgozz! Mennyi

a) $\cos 30° \cdot \cos 45° \cdot \cos 60°$;

b) $\text{tg}\, 30° \cdot \text{ctg}\, 45° \cdot \text{tg}\, 60°$;

c) $\sin 27° + \text{tg}\, 45° - \cos 63°$;

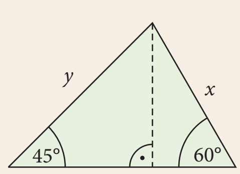
d) $\dfrac{\sin 50°}{\cos 54°} - \dfrac{\cos 40°}{\sin 36°}$?

2 **a)** Mekkora a háromszög berajzolt magassága?

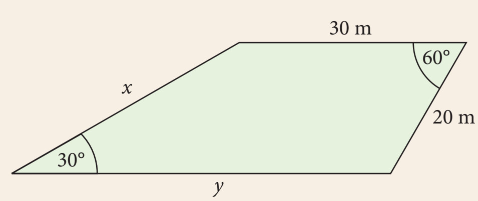
b) Mekkora a háromszög leghosszabb oldala?

c) Mekkora a háromszög területe?

d) Igaz-e, hogy $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\sin 45°}{\sin 60°}$?



3 Számítsd ki a trapéz alakú telek kerületét és területét! Használd a nevezetes hegyesszögek szögfüggvényeinek pontos értékét!



75 ÚJ TERÜLETKÉPLET

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy víztárolóban lévő víz mennyiségét kell megbecsülnünk. A térképen a tároló alakja egy olyan paralelogrammával közelíthető, amelynek oldalai 1,2 km, illetve 1,3 km hosszúak, a paralelogramma hegyesszöge pedig 41°-os. A tárolóban a víz átlagos mélysége 2,5 m.

Megoldás

A víz mennyiségét egy olyan hasáb térfogatával becsülhetjük, amelynek alaplapja a megadott paralelogramma, „magassága” pedig 2,5 méter. A hasáb térfogatát a paralelogramma területének és a víztároló mélységének a szorzata adja meg. Figyelnünk kell rá, hogy egyforma hosszúságegységet használjunk a területszámításnál és a mélység mérésénél.

A paralelogramma területét egy oldalának és az ehhez az oldalához tartozó magasságának szorzataként számíthatjuk: $T = 1{,}3 \cdot m$ (ábra).

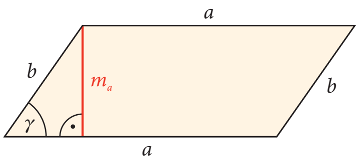
Az ábra szerint az 1,3 km hosszú oldalhoz megrajzolt magasság egy derékszögű háromszög egyik befogója. Tehát $\frac{m}{1{,}2} = \sin 41°$, amiből $m = 1{,}2 \cdot \sin 41°$. A paralelogramma területe $T = 1{,}3 \cdot m = 1{,}3 \cdot 1{,}2 \cdot \sin 41°$.

Számológéppel kapjuk, hogy $T \approx 1$ (km^2).

A víztároló mélysége méterben van megadva, ezért a területet is négyzetméterben fejezzük ki. Mivel $1\ \text{km}^2 = 10^6\ \text{m}^2$, ezért a tárolóban körülbelül $2{,}5 \cdot 10^6\ \text{m}^3$ (két és fél millió köbméter) víz van. Ez 25 millió hektoliter.

ELMÉLET

1. Ha egy paralelogramma két szomszédos oldala a, illetve b hosszúságú, és az általuk közrefogott *hegyesszög* γ, akkor e paralelogramma T területe kiszámítható a $T = ab \sin \gamma$ képlettel.

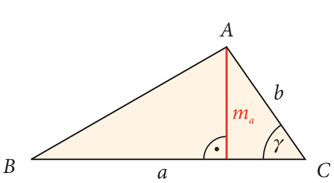


Például,

ha egy paralelogramma oldalainak hossza 42 mm, illetve 82 mm, és az egyik szöge 55°, akkor a T területet így számíthatjuk ki: $T = 42 \cdot 82 \cdot \sin 55° \approx 2821$ (mm^2).

A számolást zsebszámológéppel „egy lépésben” elvégezhetjük.

2. Ha egy háromszögnek két oldala a, illetve b hosszúságú, és az általuk közrefogott *hegyesszög* γ, akkor e háromszög T területe kiszámítható a $T = \frac{ab \sin \gamma}{2}$ képlettel.



Például,

ha $a = 4{,}5$ cm, $b = 2{,}8$ cm és $\gamma = 73°$, akkor a T területet így számíthatjuk ki:

$T = (4{,}5 \cdot 2{,}8 \cdot \sin 73°) : 2 = (12{,}6 \cdot \sin 73°) : 2 = 6{,}3 \cdot \sin 73° \approx 6{,}0$ (cm^2).

FELADAT

1 **a)** Becsüld meg, mekkora területen fekszik a Pentagon (ez az USA védelmi minisztériumának épülete Washingtonban)! Használd a megadott méretskálát!

b) Mekkora a Pentagon „udvarának” területe?

2 **a)** Egy konvex deltoid két oldalának hossza 7 cm, illetve 14 cm, és ezek 82,2°-os szöget zárnak be. Számítsd ki a deltoid területét!

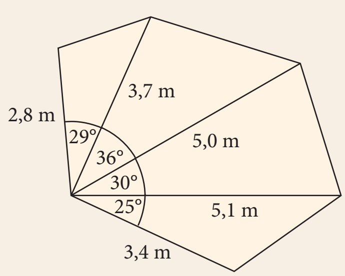
b) Egy konvex deltoid két oldalának hossza 7 cm és 14 cm, és az egyik átló hossza is 7 cm. Számítsd ki a deltoid szögeit, területét és a másik átló hosszát!

3 **a)** Egy paralelogramma területe 45 cm^2, két oldalának hossza 8 cm és 7,5 cm. Mekkora a paralelogramma hegyesszöge?

b) Egy paralelogramma hegyesszöge 40°-os, területe 0,3214 m^2, kerülete 3 m. Mekkorák a paralelogramma oldalai?

HÁZI FELADAT

1 Egy különös alakú szoba alaprajzát láthatod az ábrán.



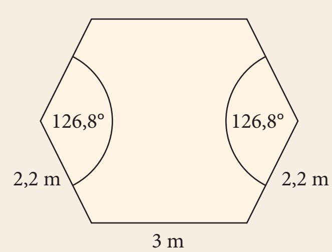
a) Számítsd ki a szoba alapterületét!

b) A valódi távolságok a megadott mérési eredményektől legfeljebb ±1%-kal térhetnek el. Hány négyzetméteres (és hány százalékos) bizonytalanságot okozhat ez a szoba alapterületének kiszámításában? (Használd a hasonló sokszögek területének arányáról tanultakat!)

2 Ne használj számológépet! Válaszd ki az alábbiak közül, melyik adja meg az 1 sugarú körbe írható szabályos nyolcszög területét!

a) $1+\sqrt{3}$ **b)** $2\sqrt{2}$ **c)** $2\sqrt{3}$ **d)** $\sqrt{6}$

3 Számítsd ki a középpontosan is és tengelyesen is szimmetrikus hatszög területét úgy, hogy három paralelogrammára bontod fel!

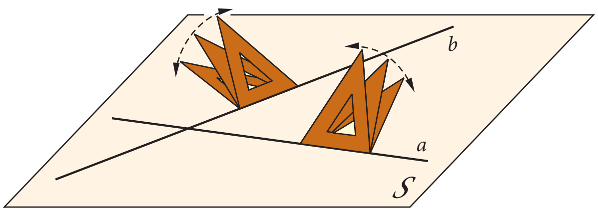


76 HAJLÁSSZÖGEK

BEVEZETŐ

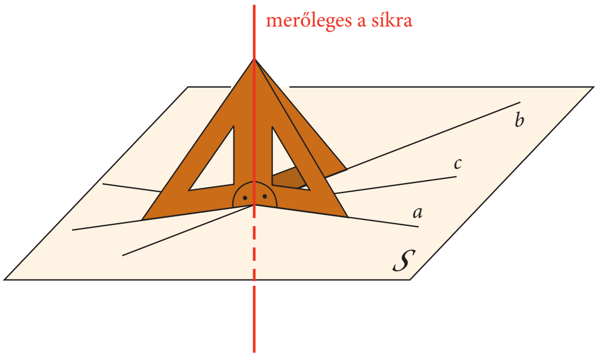
Kísérlet

Ha egy derékszögű vonalzó egyik befogóját ráhelyezed az asztal lapjára, akkor a vonalzó ennek a befogónak az egyenese (a) körül elforgatható. Most a másik befogó *a sík egyik egyenesére merőleges*, mást nem mondhatunk róla.



Ha egy másik derékszögű vonalzót is ugyanígy helyezel el, az is körbeforgatható (a b egyenes körül).

Ha azonban egymás mellé tolod a két vonalzót úgy, hogy a síkon kívüli befogójuk egy egyenesbe essen, akkor már fixen áll mindkét vonalzó, nem forgathatók el. Érdekes: ebben az esetben bármely harmadik derékszögű vonalzó is hozzájuk illeszthető úgy, hogy annak az egyik befogója szintén az asztal lapján legyen, a másik pedig egy egyenesbe essen a fix helyzetű egyenessel. Vagyis a két vonalzó közös befogóegyenese *a sík mindegyik egyenesére merőleges.*



Kísérletünk azt mutatja, hogy ha egy egyenes egy sík két metsző egyenesére merőleges, akkor már merőleges a sík minden más egyenesére (és így az egész síkra) is.

ELMÉLET

Definíció: Akkor mondjuk, hogy az *e* egyenes merőleges az *S* síkra, ha a sík minden egyenesére merőleges.

Tehát a függőleges egyenes merőleges minden vízszintes síkra. Sőt: a függőleges egyenes a vízszintes síkban lévő minden egyes egyenesre merőleges.

Ha egy függőleges egyenesen átmegy egy sík, akkor az a sík is függőleges (ezért használják falazáskor a függőónt).

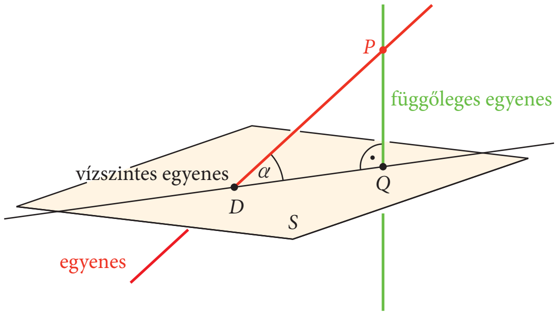
Mi a helyzet a nem függőleges egyenesekkel?

Ha egy egyenes nem függőleges, és egy D-vel jelölt pontban metszi a vízszintes S síkot, akkor az S-sel alkotott szögét a következő módon kapjuk meg:

az egyenes egy tetszőleges, de D-től különböző P pontján át egy függőleges egyenest állítunk,

ennek az S-sel való Q metszéspontját összekötjük D-vel.

A DQ vízszintes egyenesnek és az eredeti egyenesnek a szöge adja az egyenes és az S sík szögét (α-t).



FELADAT

1 Egy téglalap alapú tanterem padlójának négy csúcsát jelöljük – a körüljárást megtartva – *A*, *B*, *C* és *D*-vel. A terembe behozunk egy mikrofon-állványt, és felállítjuk a teremben úgy, hogy a rúdja függőlegesen álljon. Mekkora szöget zár be az állvány rúdjának egyenese

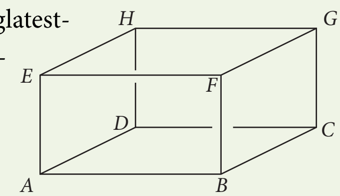
a) a padló síkjával;
b) az *AB* egyenessel,
c) az *AC* egyenessel?
Válaszodat indokold!

2 Egyre jobban elterjednek hazánkban is az energiatakarékos fényforrások, köztük azok, amelyeket LED-lámpának neveznek. (A LED betűszó a *fénykibocsátó dióda* kifejezés angol nevére utal). Ezeknek a csomagolásán általában feltüntetik az úgynevezett „világítási szöget” (lásd az ábrát).

a) Két lámpát vásároltunk: az egyik világítási szöge 40°, a másiké 110°. A lámpákat egy asztal lapja fölé, a laptól 40 cm magasságban rögzítjük, és a fényüket függőlegesen lefelé irányítjuk. Mekkora átmérőjű körlapot világít meg az egyik, illetve a másik LED-lámpa?

b) Legalább mekkora világítási szögű LED-lámpát kell a 80 cm átmérőjű kerek asztal lapjától 0,6 m magasságban felszerelni, hogy teljesen megvilágítsa az asztallapot?

3 Az ábra szerinti téglatestben az alábbiak közül melyik szög derékszög?



a) az *ABCD* lap síkjának és *DH* egyenesének hajlásszöge;
b) az *EFGH* lap síkjának és *CH* egyenesének hajlásszöge;
c) *AE* és *CD* egyenesek szöge;
d) *AE* és *BD* egyenesek szöge;
e) *AE* és *CF* egyenesek szöge?

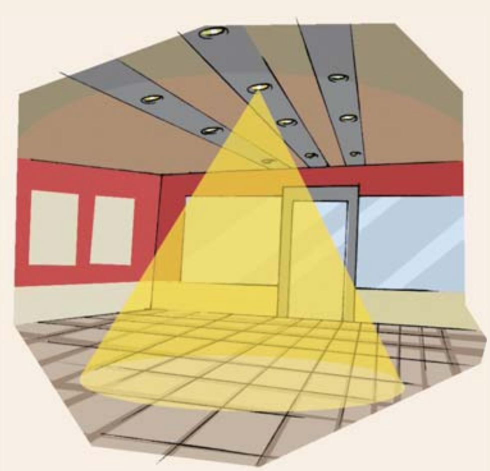
4 A Szabadság-szobor New Yorkban egy 46 m magas talapzaton áll, a szobor maga is 46 m magas.

a) Mekkora szögben látható a szobor a talapzattól 70 m-es távolságból?
b) Hogyan változik meg a szobor látószöge, ha feleakkora, illetve ha kétszer akkora távolságból nézzük?

HÁZI FELADAT

1 Egy 712 m magas hegy tetején állva nézzük a szomszédos hegy csúcsát. A vízszinteshez képest lefelé nézünk, és a látósugár 6°-os szöget zár be a vízszintessel. A két hegycsúcs távolsága egymástól 435 m. Milyen magas a szomszédos hegy?

2 **a)** Egy 76° világítási szögű spotlámpát egy gerendára rögzítettek 260 cm magasan, és pontosan függőlegesen lefelé irányították. Mekkora a padlón megvilágított terület?
b) Milyen magasan legyen a lámpa, ha azt szeretnénk, hogy legfeljebb egy 8 m^2-es területet világítson be?

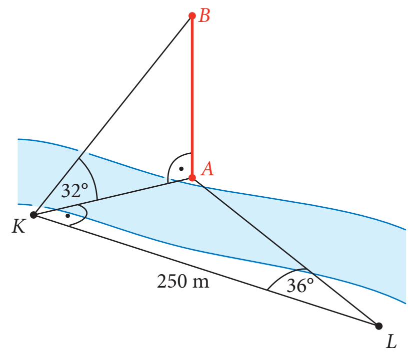


Ráadás

MILYEN MAGAS A TORONY?

KIDOLGOZOTT FELADAT

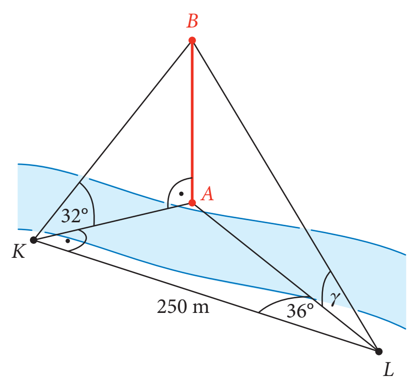
1. Sík vidéken, egy folyó közelében álló torony magasságát (AB) szeretnénk megállapítani, de csak a folyó túlsó partján tudunk méréseket végezni.



Megoldás

Egy lehetséges módszer: Megállunk szemben a toronnyal a K pontban, megmérjük az AKB szöget: 32°. Az ABK derékszögű háromszögről leolvashatjuk, hogy
$AB = AK \cdot \operatorname{tg} 32°$,
vagyis először az AK szakasz hosszát kell meghatároznunk. A folyó innenső partján az AK-ra merőlegesen elmegyünk 250 méternyire, az L pontba, megmérjük az ALK szöget: 36°.
Az ALK derékszögű háromszögről leolvashatjuk, hogy $AK = 250 \cdot \operatorname{tg} 36° \approx 182$ (méter), tehát
$AB = AK \cdot \operatorname{tg} 32° \approx 182 \cdot \operatorname{tg} 32° \approx 114$ (méter).

2. Mekkora szögben látjuk a tornyot az L pontból?



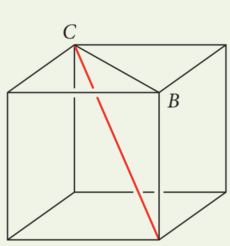
Megoldás

Az AB *függőleges*, ezért minden *vízszintes* egyenesre merőleges, így az AL egyenesre is. Az LAB háromszög tehát derékszögű. Ennek a háromszögnek az L csúcsánál fekvő hegyesszögét kell kiszámítanunk.
Az AKL háromszögből kiszámítjuk az AL szakasz hosszát:
$\cos 36° = \dfrac{250}{AL}$, amiből $AL = 250 : \cos 36° \approx 309$ méter,
azután pedig az LAB derékszögű háromszögből: $\operatorname{tg} \gamma = \dfrac{AB}{AL} \approx \dfrac{114}{309} \approx 0{,}369$.
Ebből $\gamma \approx 20°$. Az L pontból 20°-os szögben látjuk a tornyot.

FELADAT

1 **a)** Mekkora szögben látjuk a kidolgozott feladatban szereplő tornyot a KL szakasz felezőpontjából?
b) Milyen messzire menjünk a parton K-tól a KL egyenesen, hogy onnan a tornyot 15°-os szögben lássuk?

2 Mekkora szöget alkot a kocka piros testátlójának egyenese a fedőlap síkjával?



a) Igazold, hogy az ABC háromszög derékszögű!
b) Mekkorák az ABC háromszög oldalai, ha a kocka éle 3,2 cm hosszú?
c) Igazold, hogy az ACB szög adja meg a piros egyenes és a fedőlap szögét!
d) Számítsd ki ezt a szöget!

3 Egy téglatest oldalai 3,2 m; 6,9 m és 8,4 m hosszúak. Mekkora szöget zár be a téglatest egyik testátlója az oldallapokkal?

4 A szabályos tetraédernek négy csúcsa és négy lapja van. Négy egybevágó szabályos háromszög határolja. Tekintsük a szabályos tetraéder egyik lapját (nevezzük ezt most alaplapnak), és egy olyan élét, amelyik nem illeszkedik erre a lapra (oldalélét)!

a) Mekkora szöget zár be a tetraéder oldaléle az alaplaphoz tartozó magassággal?

b) Mekkora szöget zár be a tetraéder oldaléle az alaplappal?

5 Mekkora távolságból látszik a legnagyobb szögben a New York-i Szabadság-szobor? Az adatokat az előző lecke 4. feladatában találod.

HÁZI FELADAT

1 Ha Péter kinéz az ablakukon, akkor a szemmagassága 6 méterrel van a járda fölött. A szemközti hatalmas fa alját 10°-os depressziószögben, a tetejét 22°-os emelkedési szögben látja. Milyen magas a fa? (A depressziószög a megfigyelőtől egy nála alacsonyabban fekvő pontra irányuló látósugárnak a vízszintes síkkal bezárt szöge.)

2 A 2. feladatban szereplő kocka A csúcsát kösd össze a *BC* oldal felezőpontjával (ezt jelöljük *F*-fel)!

a) Mekkora szöget zár be *AF* egyenese a kocka fedőlapjával?

b) Mekkora szöget zár be *AF* egyenese a kocka alaplapjával?

c) Mekkora szöget zár be *AF* egyenese a kocka jobb oldali oldallapjával?

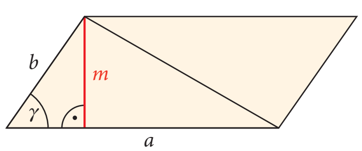
3 Határozd meg a folyó túlsó partján álló torony magasságát (*AB*-t), ha a folyó innenső partján lévő *K* pontból 28°-os szögben látszik, a *K*-tól 250 m-re lévő *L* pontból 18°-os szögben látszik! Tudjuk továbbá, hogy *AKL* szög derékszög, ahol *A* a torony talppontja.

EMELT SZINT

Bizonyítsuk be a 75. leckében megismert két területképletet!

1. állítás

Ha egy paralelogramma oldalainak hosszúsága a és b, hegyesszöge pedig γ, akkor e paralelogramma területe: $T = ab \sin \gamma$.



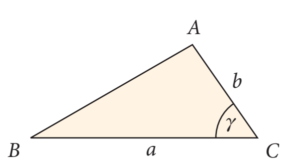
Bizonyítás

Jelöljük a paralelogramma a oldalhoz tartozó magasságát m-mel.
Ekkor a jobb oldali derékszögű háromszögből $m = b \sin \gamma$, ezért
$T = am = ab \sin \gamma$.

2. állítás

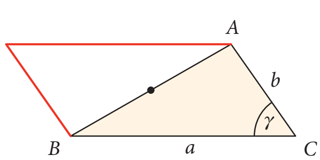
Ha egy háromszög két oldalának hosszúsága a és b, az általuk közrefogott hegyesszög pedig γ, akkor e háromszög területe:

$$T = \frac{ab \sin \gamma}{2}.$$



Bizonyítás

Az ábra szerinti jelöléseket használjuk. Ha az *ABC* háromszöget az *AB* oldal felezőpontjára tükrözzük és a tükörképet az eredeti háromszöggel egyesítjük, akkor egy olyan paralelogramma keletkezik, amelynek két szomszédos oldala a és b, az általuk közbezárt hegyesszög pedig éppen γ.



A kapott paralelogramma területe $ab \sin \gamma$,
Az *ABC* háromszög területe éppen fele a paralelogramma területének, tehát a paralelogramma területére felírt összefüggésekből 2-vel osztva kapjuk meg a háromszög területét. Ez pedig állításunkat bizonyítja.

77 GYAKORLÁS

CSOPORTMUNKA

Dolgozzatok négyfős csoportokban! A megoldásokat beszéljétek meg mozaikmódszerben!
Minden csoport oldja meg a saját feladatait! A megoldásokat beszéljétek meg a csoporton belül egymással olyan módon, hogy mindenki értse annak lépéseit. Ezután alkossatok új csoportokat úgy, hogy minden csoportban legyen az eredeti csoportokból 1-1 fő.
Az első feladat mindenkinél azonos volt. Egyeztessétek a megoldásaitokat és beszéljétek meg, milyen módon jutottatok el a végeredményhez!
A többi feladat eltérő, de azonos típusú. Azok, akik a feladatot megoldották, magyarázzák el a többieknek a megoldásuk menetét. Akik ugyanazt a feladatot oldották meg, segítsék egymást a magyarázatban!
Ha valamelyik feladatnál nehézségbe ütköztök, kérjétek tanárotok segítségét!

I. FELADATSOROZAT

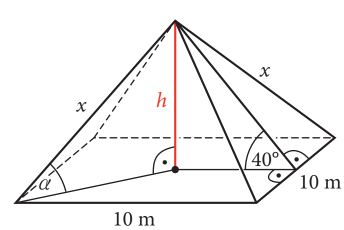
1 Az ABC háromszögben $AB = 65$ mm, $BC = 98$ mm, az ABC szög 108°-os. Mekkora ennek a háromszögnek
- **a)** a C csúcsból induló magassága;
- **b)** a területe;
- **c)** a két hegyesszöge;
- **d)** a B csúcsból induló magassága;
- **e)** az AC oldala?

2 Tükrözzétek az 1. feladatban szereplő ABC háromszöget az AC oldalának egyenesére! A háromszög és a tükörképe együtt egy deltoidot alkot. Mekkorák ennek

a) az oldalai; **b)** a szögei; **c)** az átlói?

3 Egy körlapból olyan szabályos 7-szöget vágunk ki, amelynek oldalai 2,6 cm hosszúak.
- **a)** Mekkora sugarú körlap esetén oldható meg ez a feladat?
- **b)** Legkevesebb hány cm^2 hulladék keletkezik?
- **c)** A szabályos hétszögből újra kivágunk egy körlapot. Mekkora lehet ennek a sugara?

4 Egy 10 m × 10 m-es alap fölé szabályos négyoldalú gúla alakú háztetőt emeltek. A tető oldallapjai 40°-os szöget alkotnak a vízszintes síkkal (lásd az ábrát).



- **a)** Milyen magas a tető (h)?
- **b)** Hány m^2-t kell cseréppel befedni?
- **c)** Milyen hosszúak az oldalélgerendák (x), és mekkora szöget alkotnak a vízszintes síkkal (α)?
- **d)** Mekkora szöget zár be két szomszédos oldalél-gerenda? És a két szemközti?

II. FELADATSOROZAT

1 Az ABC háromszögben $AB = 65$ mm, $BC = 98$ mm, az ABC szög 108°-os. Mekkora ennek a háromszögnek

a) a C csúcsból induló magassága,
b) a területe,
c) a két hegyesszöge,
d) a B csúcsból induló magassága,
e) az AC oldala?

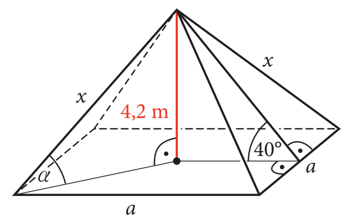
2 Egészítsétek ki az 1. feladatban szereplő ABC háromszöget tengelyesen szimmetrikus trapézzá úgy, hogy AB legyen a rövidebbik alap és BC a trapéz egyik szára. Mekkorák ennek a trapéznak

a) az oldalai;
b) a szögei;
c) az átlói?
d) Mekkora a trapéz területe?

3 Egy körlapból olyan szabályos 8-szöget vágunk ki, amelynek oldalai 3,7 cm hosszúak.

a) Mekkora sugarú körlap esetén oldható meg ez a feladat?
b) Legkevesebb hány cm^2 hulladék keletkezik?
c) A szabályos nyolcszögből újra kivágunk egy körlapot. Mekkora lehet ennek a sugara?

4 Egy négyzet alakú alap fölé 4,2 méter magas szabályos négyoldalú gúla alakú háztetőt emeltek. A tető oldallapjai 40°-os szöget alkotnak a vízszintes síkkal (lásd az ábrát).



a) Mekkora a tető alapéle (a)?
b) Hány m^2-t kell cseréppel befedni?
c) Milyen hosszúak az oldalélgerendák (x), és mekkora szöget alkotnak a vízszintes síkkal (α)?
d) Mekkora szöget zár be két szomszédos oldalél-gerenda? És a két szemközti?

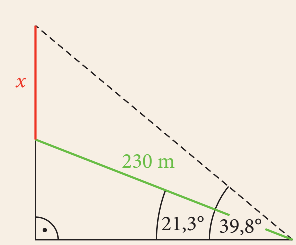
HÁZI FELADAT

1 Egy síkban, a 17 cm sugarú kör K középpontjától 20 cm távolságra van a P pont. A P-ből két érintőt húzunk a körhöz.

a) Mekkora szöget zár be a két érintő?
b) Mekkora az érintőszakaszok hossza?
c) Mekkora területű az a konvex síkidom, amelyet a kör egy íve és a két érintőszakasz határol?
d) Mekkora területű az a konkáv síkidom, amelyet a kör egy íve és a két érintőszakasz határol?

2 Mekkorák a 3,7 cm oldalú szabályos nyolcszög átlói?

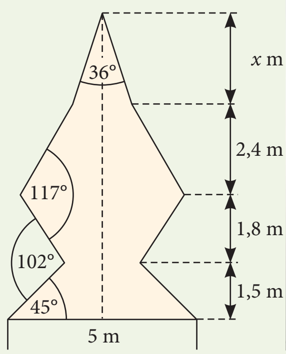
3 Egy toronyantennához 230 m hosszú egyenes út vezet, melynek emelkedési szöge 21,3°. Az út elejéről az antenna csúcsa 39,8° emelkedési szög alatt látszik. Milyen magas az antenna?



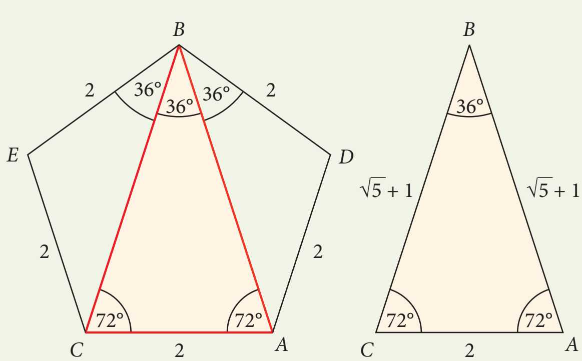
78 GYAKORLÁS, TUDÁSPRÓBA

FELADAT

1 Egy forgáshenger alakú épület tetejére díszes tornyot terveztek. A tervrajzon a torony forgástengelyén átmenő síkmetszete látható. Milyen magas a díszítő toronyrész?

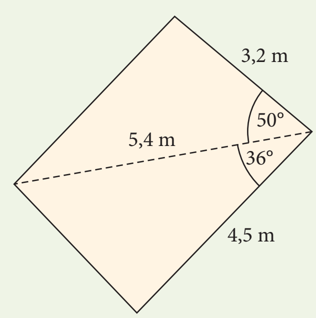


2 Nem csak a 30°, a 45° és a 60° szinuszának, koszinuszának, tangensének és kotangensének pontos értéke ismert. A 2 egység oldalú szabályos ötszögben is felbukkan az az egyenlő szárú háromszög, amelynek a szárhosszát az aranymetszés segítségével kiszámítottuk és az ábrán feltüntettük.



Írd fel a megadott oldalhosszak, illetve a háromszög területképlete ismeretében a cos 72°, a sin 18°, a sin 72° és a cos 18° pontos értékét (a négyzetgyökös részleteket ne helyettesítsd a közelítő értékükkel)!

3 Tünde megmérte egy négyszög alakú helyiség egyik sarkánál a négyszög belső szögét. Többszöri mérés után arra jutott, hogy a mért szög 86°-os.
– Ez a helyiség biztosan nem téglalap alakú – gondolta –, mégis meg tudom állapítani az alapterületét.
Az ábra szerinti három szakasz és két szög nagyságát többszöri gondos mérés után jegyezte fel.



a) Mekkora a helyiség alapterülete?

b) Vajon paralelogramma-e a négyszög?
Tünde így gondolkodott:
– Persze megmérhetném a négyszög másik két oldalát is vagy szögeket mérhetnék, de igazából erre nincs is szükségem, mert hiszen további mérések nélkül is megkapom a választ.

Te hogyan döntenéd el, hogy a négyszög paralelogramma-e vagy sem?

TUDÁSPRÓBA I.

1 **a)** Add meg egy olyan derékszögű háromszög oldalainak hosszát, amelyben az egyik hegyesszög szinusza 0,6!

b) Mekkora ennek a szögnek a koszinusza, a tangense és a kotangense?

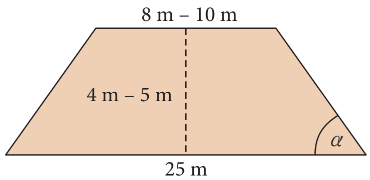
c) Mekkora a derékszögű háromszög másik hegyesszögének a szinusza, a koszinusza, a tangense és a kotangense?

2 Egy 3,4 cm sugarú kör két érintője 56°-os szöget alkot egymással.

a) Mekkora távolságra van az érintők metszéspontja a kör középpontjától?

b) Mekkora annak a konvex síkrésznek a területe, amelyet a kör egy íve és a két érintő fog közre?

3 A 2010 októberében a Veszprém megyei Kolontáron épült 600 méter hosszú védőgát húrtrapéz alakú keresztmetszetét a következő ábra mutatja.



a) Mit jelenthet az, hogy a trapéz kisebbik alapja 8 m – 10 m, illetve a magasság 4 m – 5 m?

b) Milyen határok között változik az α dőlésszög?

4 (Egy 800 éves feladat alapján.) Két torony áll egymástól 60 könyök távolságra. A két torony között, mindkét torony csúcsától egyenlő távolságra áll egy kút. Az egyik torony magassága 50 könyök, ez a kúttól 69°-os szögben látszik.

a) Milyen messze van ez a kút a két torony alapjától?

b) Mekkora szögben látszik a másik torony a kúttól?

c) Milyen magas a másik torony?

TUDÁSPRÓBA II.

1 **a)** Add meg egy olyan derékszögű háromszög oldalainak hosszát, amelyben az egyik hegyesszög koszinusza 0,8!

b) Mekkora ennek a szögnek a szinusza, a tangense és a kotangense?

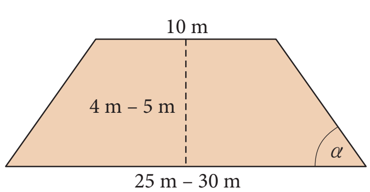
c) Mekkora a derékszögű háromszög másik hegyesszögének a szinusza, a koszinusza, a tangense és a kotangense?

2 Egy 6,8 cm sugarú kör két érintője 78°-os szöget alkot egymással.

a) Mekkora távolságra van az érintők metszéspontja a kör középpontjától?

b) Mekkora annak a konkáv síkrésznek a területe, amelyet a kör egy íve és a két érintő fog közre?

3 A 2010 októberében a Veszprém megyei Kolontáron épült 600 méter hosszú védőgát húrtrapéz alakú keresztmetszetét a következő ábra mutatja.



a) Mit jelenthet az, hogy a trapéz hosszabbik alapja 25 m – 30 m, illetve a magasság 4 m – 5 m?

b) Milyen határok között változik az α dőlésszög?

4 (Egy 800 éves feladat alapján.) Két torony áll egymástól 60 könyök távolságra. A két torony között, mindkét torony csúcsától egyenlő távolságra áll egy kút. Az egyik torony magassága 35 könyök, ez a kúttól 41°-os szögben látszik.

a) Milyen messze van ez a kút a két torony alapjától?

b) Mekkora szögben látszik a másik torony a kúttól?

c) Milyen magas a másik torony?

TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

1 Határozd meg a következő szögek tangensét!

a) 12°; 38°; 82°; 73°;

b) 0,2 rad; 0,4 rad; 0,9 rad; 1,2 rad.

2 Határozd meg a következő szögek tangensét!

a) 16,8°; 33,24°; 88,92°; 71,45°;

b) 0,27 rad; 0,43 rad; 0,79 rad; 1,37 rad.

3 Hány fokos, illetve hány radiános az a hegyesszög, melynek tangense:

a) 0,2; **c)** 17;

b) 2; **d)** 78?

4 Hány fokos, illetve hány radiános az a hegyesszög, melynek tangense:

a) 0,33; **c)** 13,5;

b) 2,76; **d)** 85,3?

5 Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 72°-os. A mellette fekvő befogója 5,2 cm.

a) Mekkora a másik befogója?

b) Mekkora az átfogója?

6 Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 27°-os. A szemközti befogója 34 mm. Milyen hosszú a másik befogó?

7 Egyenes létrát támasztunk egy egyenes (függőleges) fához. A létra alja 48 cm-re van a fa aljától, a létra felső vége 208 cm magasan van. Mekkora szöget zár be a létra a talajjal?

8 Egy kétágú létrát szétnyitunk és felállítunk. Ekkor a legmagasabb pontja 185 cm magasan van. A létra két szára 78%-os szöget zár be a talajjal. Milyen hosszúak a létra szárai?

9 Határozd meg a következő szögek szinuszát és koszinuszát, három tizedesjegyre kerekítve!

a) 12°; 38°; 82°; 73°;

b) 0,2 rad; 0,4 rad; 0,9 rad; 1,2 rad

10 Hány fokos az a hegyesszög, melynek szinusza:

a) 0,33; **c)** 0,811;

b) 0,76; **d)** 0,985?

11 Hány radiános az a hegyesszög, melynek koszinusza:

a) 0,122; **c)** 0,611;

b) 0,276; **d)** 0,885?

12 Egy derékszögű háromszög egyik szöge 17°-os, átfogója 23 cm. Mekkorák a befogók?

13 Egy derékszögű háromszög egyik szöge 31°-os, vele szemközti befogója 4,9 cm. Milyen hosszú a másik befogó?

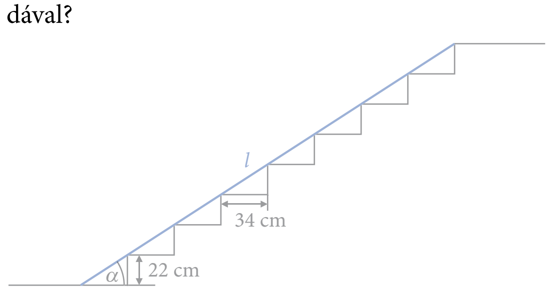
14 Egy derékszögű háromszög egyik szöge 27°-os, a szög melletti befogó 3,8 cm. Milyen hosszú az átfogóhoz tartozó magasság?

15 Egy téglalap oldalai 46 mm és 79 mm. Mekkora szöget zárnak be egymással a téglalap átlói?

16 Egy hegycsúcsra egyenes út vezet fel, ennek hossza 240 m, és emelkedése 15° (15°-os szöget zár a be az út a vízszintessel). A hegy tetején áll egy 32 m magas kilátó. Mekkora szögben látszik a kilátó teteje a hegyre vezető út aljából?

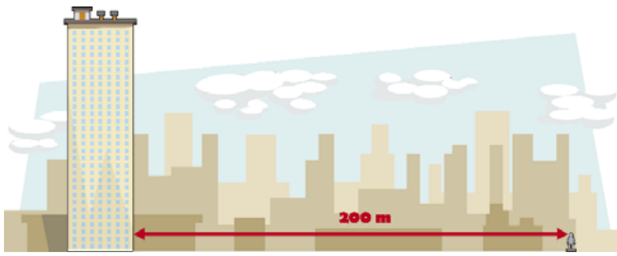
17 Mekkora szögben látszik a 3,6 cm sugarú kör középpontjából a kör 4,9 cm hosszú húrja?

18 Akadálymentesítés miatt egy lépcsőre rámpát terveznek. A lépcsők magassága 22 cm, hosszuk 34 cm. A járdaszinttől a bejáratig nyolc lépcső vezet. Milyen hosszú legyen a rámpa? Mekkora szöget zár be a járdával?

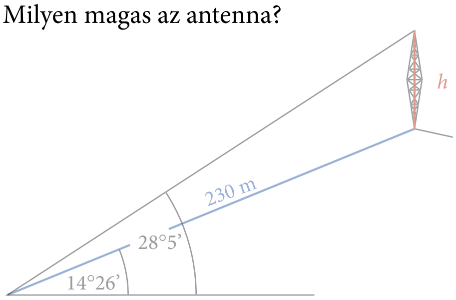


19 Milyen messze van tőlünk az a 32 m magas épület, amely 6,3° emelkedési szögben látszik, ha a mérést egy 1,5 m magas teodolit állvánnyal végezzük?

20 Egy 30 emeletes toronyházból figyeljük a talajon, a háztól 200 méterre álló szobrot. Mekkora depresszió-szögben látszik a szobor talapzatának alja a hetedik, illetve huszonnyolcadik emeleti ablakból, ha egy emelet magassága 340 cm?



21 Egy toronyantennához olyan 230 m hosszú egyenes út vezet, melynek emelkedése 14,4°. Az út elejéről az antenna csúcsa 28,1° emelkedési szög alatt látszik. Milyen magas az antenna?



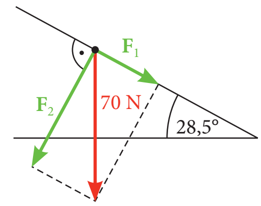
22 Egy repülő állandó magasságban repül, egy autópálya egyenes szakasza felett, a pályával párhuzamosan. Az utat átívelő felüljáró 23°-os lehajlási szögben látszik. A repülő tovább halad a pályával párhuzamosan 1250 m-t, és ekkor a felüljáró 32°-os lehajlási szögben látszik. Készíts ábrát! Milyen magasan halad a repülő?

23 Mekkora szöget zárnak be egymással a kocka egy csúcsból kiinduló testátlója és egyik lapátlója?

24 Egy hegy tetejét 26°-os emelkedési szög alatt látjuk. Ha 145 m-rel közelebb megyünk, akkor 29°-os emelkedési szögben látjuk. Milyen magas a hegycsúcs?

25 A lejtőre helyezett test mozgásának vizsgálatához gyakran célszerű a test súlyát megadó vektort két olyan vektor összegeként előállítani, amelyek egyike a lejtővel párhuzamos, másika pedig a lejtőre merőleges.

Hány newton nagyságú az $\mathbf{F}_1$, illetve $\mathbf{F}_2$, ha a test 70 newton súlyú, a lejtő a vízszintes síkkal 28,5°-os szöget zár be?



26 Egy lejtő hajlásszöge 42°. A lejtőre helyezünk egy 89 N súlyú testet. Bontsd fel a súlyerőt lejtőirányú és lejtőre merőleges összetevőkre (azaz a 89 N nagyságú, függőleges vektort bontsd fel két olyan vektor összegére, melyek közük egyik párhuzamos a lejtővel, másik merőleges rá)!

a) Készíts ábrát!

b) Mekkora a súlyerő két összetevője?

27 Egy 6 cm sugarú körbe szabályos ötszöget rajzolunk.

a) Mekkora az ötszög oldala?

b) Mekkora az ötszög területe?

c) Mekkora a beírható kör sugara?

28 Egy körhöz egy külső *P* pontból meghúzzuk az érintőket. A két érintő egymással 54°-os szöget zár be. Az érintőszakaszok hossza 7,4 cm. Mekkora a két érintő és az érintési pontok közötti rövidebbik körív által határolt síkidom területe?

29 Mekkora a 10 cm sugarú körbe írt szabályos 30-szög kerülete, területe? Hány százalékkal kisebb ez a kör kerületénél, illetve területénél?

30 Egy háztető alakja szabályos négyoldalú gúla. Az alapélei 12,3 m hosszúak, az oldalélei 9,8 m hosszúak.

a) Milyen magas a tető?

b) Mekkora szöget zárnak be az oldalélek a vízszintes síkkal?

c) Mekkora szöget zárnak be a tető oldallapjai a vízszintes síkkal?

d) Hány m^2 cseréppel kell befedni a tetőt?

31 Egy 5,2 cm sugarú körbe írunk egy háromszöget, melynek két szöge 37°és 53°. Mekkora a területe?

32 Egy háromszög két szöge 51° és 71°. A köré írt kör sugara 3,6 cm. Mekkora a területe?

79 EGYENLŐTLENSÉGEK

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Márton tavaly 70 kg tömegű volt, és 170 cm magas. Idén 5 kg-mal „nehezebb” (nagyobb tömegű), testtömegindexe mégis csökkent a tavalyihoz képest. Hány cm-t nőhetett Márton tavaly óta?

Megoldás

A testtömegindexet úgy számítjuk ki, hogy a testtömeget elosztjuk a méterben mért magasság négyzetével. (Ez akkor „normális”, ha 20 és 25 közé esik.) Az adatok szerint tavaly Márton testtömegindexe $\frac{70}{1{,}7^2} = 24{,}2$ volt.

Ha Márton idén x méter magas, akkor a testtömegindexe $\frac{75}{x^2}$. A feladat szerint $\frac{75}{x^2} < 24{,}2$.

Világos, hogy itt $x > 0$, tehát a pozitív számok halmazán keressük a megoldásokat.

Ezt az egyenlőtlenséget mérlegelv alkalmazásával is alakíthatjuk.

Szorozzuk meg mindkét oldalt x^2-tel: $75 < 24{,}2x^2$ (mivel $x > 0$, ezért $x^2 > 0$ is igaz, tehát pozitív számmal szoroztunk), majd osszuk el mindkét oldalt 24,2-del: $3{,}1 < x^2$.

Egy pozitív szám négyzete pontosan akkor nagyobb 3,1-nél, ha maga a szám nagyobb $\sqrt{3{,}1}$-nél, azaz kb. 1,76-nál.

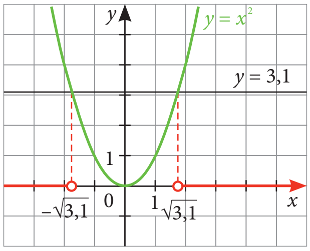
Ez azt jelenti, hogy Márton idén 1,76 méternél magasabb, vagyis több mint 6 cm-t nőtt tavaly óta.

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a $\frac{75}{x^2} < 24{,}2$ egyenlőtlenséget!

Megoldás

Aki gyorsan azt válaszolja, hogy ugyanaz a megoldása (tehát $x > 1{,}76$) ennek az egyenlőtlenségnek is, mint az 1. feladatbelinek, az hibázik. Az értelmezési tartományba a negatív valós számok is beletartoznak, csak a 0 nem.

A mérlegelv most is alkalmazható, hiszen $x^2 > 0$ most is igaz. Mérlegelv alkalmazása után ugyanazt kapjuk, mint előbb: $3{,}1 < x^2$.



Melyik valós számokra teljesül, hogy négyzetük nagyobb 3,1-nél? Az ábrán jól láthatjuk, hogy ez nemcsak a $\sqrt{3{,}1}$-nél nagyobb számokra teljesül, hanem a $(-\sqrt{3{,}1})$-nél kisebb számokra is. Az x tengelyen pirossal jelöltük a megfelelő számokat.

Kerekített értékeket használva a megoldáshalmaz: $\mathbf{R} \setminus [-1{,}76;\ 1{,}76]$.

3. Oldjuk meg a $\{1, -1; 2; -2\}$ alaphalmazon a $\frac{75}{x^2} < 24{,}2$ egyenlőtlenséget!

Megoldás:

Az alaphalmaz elemeit helyettesítsük be az egyenlőtlenségbe! 1 és –1 behelyettesítésekor hamis állítást kapunk ($75 \not< 24{,}2$), de 2 és –2 behelyettesítésekor igaz állítást kapunk ($18{,}75 < 24{,}2$). Ezért az alaphalmazon az egyenlőtlenség megoldáshalmaza a $\{2; -2\}$ halmaz.

ELMÉLET

Ha *véges alaphalmazon* akarunk megoldani egy egyenlőtlenséget, akkor az alaphalmaz elemei közül kikeressük azokat, amelyek behelyettesítésével az egyenlőtlenségből *igaz állítást* kapunk. Ezek az elemek az egyenlőtlenség *megoldásai*.
Ugyanúgy, mint az egyenleteknél, itt is csak *az alaphalmaz és az értelmezési tartomány közös elemei közül kerülhetnek ki a megoldások.*
Ha *végtelen alaphalmazon* akarunk megoldani egy egyenlőtlenséget, akkor más megoldási módszerre van szükségünk. Általában olyan, egyszerűbb egyenlőtlenséget keresünk a megadott helyett, amelynek közvetlenül leolvashatjuk a megoldásait. Erre igen alkalmas eszköz a **mérlegelv**, amely a következő alapigazságokon alapul:
az egyenlőtlenség megoldásainak a halmaza nem változik meg, ha a $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ jel két oldalán álló kifejezést (számot)
- ugyanannyival növeljük vagy csökkentjük,
- ugyanazzal a pozitív számmal megszorozzuk vagy elosztjuk,
- ugyanazzal a negatív számmal megszorozzuk vagy elosztjuk, és ezzel egyszerre a $<$, $>$, $\leq$, illetve $\geq$ jel irányát megfordítjuk.

FELADAT

1 Oldd meg az egyenlőtlenségeket az $A = \{-2; -1; 0; 0{,}5; 1; 5\}$ alaphalmazon!

a) $3 - |x| > 2$

b) $\dfrac{2}{\left|x + \frac{1}{2}\right|} > 3$

c) $\left|x - \frac{1}{2}\right| \cdot (x^2 - 1) < 0$

2 Edináék egyik házi feladata az volt, hogy oldják meg az $x^2 + 4x < 0$ egyenlőtlenséget. Edina a zérushelyek segítségével gyorsan megrajzolta az $x \mapsto x^2 + 4x$ másodfokú függvény grafikonját, és a grafikon alapján azt írta, hogy a $]-4; 0[$ intervallum a megoldáshalmaz.
Eszter mérlegelv segítségével oldotta meg az egyenlőtlenséget. Mindkét oldalból kivont $4x$-et: $x^2 < -4x$, majd mindkét oldalt elosztotta x-szel: $x < -4$.
Tehát a (-4)-nél kisebb számok az $x^2 + 4x < 0$ egyenlőtlenség megoldásai.
Melyikük megoldása jó? Aki hibázott, az hol követte el a hibát?

3 Oldd meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket!

a) $\dfrac{3}{x^2} > \dfrac{16}{3}$

b) $5(4 - x^2) \geq -2(x^2 + 14)$

c) $41 - 20x \leq (2x - 5)^2$

d) $\dfrac{2}{(x-2)^2} < \dfrac{1}{(x-1)^2}$

HÁZI FELADAT

1 Oldd meg az egyenlőtlenségeket az $A = \{-1; 0; 3; 4; 4{,}8; 5\}$ alaphalmazon!

a) $\dfrac{x-4}{-3} < 2$

b) $x^2 + x \geq 0{,}8(3 - x)$

c) $x + \dfrac{1}{x-3} > 5$

d) $(x+1)(1-7x) \geq 3$

2 Figyeld meg jól a következő egyenlőtlenségeket! Igazold, hogy a megoldáshalmazuk az üres halmaz, akármelyik halmazt választjuk is alaphalmaznak!

a) $23 + (5 - 3x)^2 < 11$

b) $\dfrac{12x - 3x^2}{x(x-4)} > 2$

3 Oldd meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket!

a) $-3x^2 + 4x + 15 < 4(x^2 + x - 12)$

b) $\dfrac{8}{-x^2} \geq -\dfrac{25}{2}$

c) $5x^2 + 17 > 8 - 4x^2$

d) $\dfrac{5x}{(x+5)^2} \leq \dfrac{1}{2}$

Megoldásaidat ellenőrizheted *függvény-ábrázoló programmal* is.

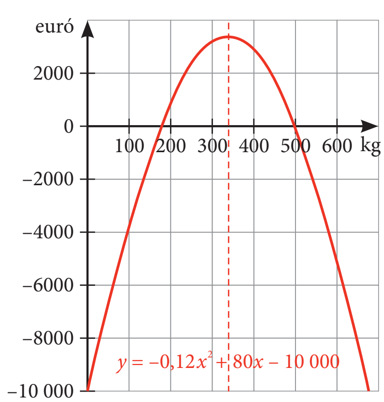
80 MÁSODFOKÚ EGYENLŐTLENSÉGEK

KIDOLGOZOTT FELADAT

A Krémvarázs cégnél arckrémet állítanak elő.
Ha a havi termelés x kg arckrém $(x \geq 0)$, akkor az árbevétel (euróban) a $b(x) = 30x - 0{,}02x^2$ képlettel, a költség pedig a $k(x) = 0{,}1x^2 - 50x + 10\,000$ képlettel írható le. Havi hány kg termék előállítása és értékesítése esetén nyereséges a termelés, és mekkora az elérhető legnagyobb nyereség?

Megoldás
A bevétel és a költség különbsége a „nyereség”, tehát a nyereséget az $n(x) = b(x) - k(x)$ képlet adja meg.
$n(x) = 30x - 0{,}02x^2 - (0{,}1x^2 - 50x + 10\,000) = 30x - 0{,}02x^2 - 0{,}1x^2 + 50x - 10\,000 = -0{,}12x^2 + 80x - 10\,000.$
A termelés akkor nyereséges, ha $n(x) > 0$.
Meg kell tehát oldani a $-0{,}12x^2 + 80x - 10\,000 > 0$ másodfokú egyenlőtlenséget.
Azt könnyen meg tudjuk mondani, hogy mely esetben egyenlő a bevétel a költséggel, azaz mikor 0 a nyereség (ezt már az első kötet 129. oldalán található 7. feladatban kiszámoltuk), mert ehhez csak a $-0{,}12x^2 + 80x - 10\,000 = 0$ másodfokú egyenletet kell megoldanunk.

Megoldóképlettel: $x_{1,2} = \dfrac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4 \cdot (-0{,}12) \cdot (-10\,000)}}{2 \cdot (-0{,}12)} = \dfrac{-80 \pm 40}{-0{,}24}$; $x_1 = 500$, $x_2 = \dfrac{500}{3} \approx 167$.



Eredményünk azt jelenti, hogy ≈ 167 kg, illetve 500 kg krém gyártása esetén nulla a nyereség (profit) értéke.
A nyereséget leíró $x \mapsto -0{,}12x^2 + 80x - 10\,000$ $(x \geq 0)$ függvényre nézve ez azt jelenti, hogy két zérushelye van, az $\dfrac{500}{3}$ (≈ 167) és az 500. Mivel a függvény grafikonja lefelé nyitott parabola (egy íve), ezért ha $\dfrac{500}{3} < x < 500$, akkor a függvényértékek pozitívak.
A $-0{,}12x^2 + 80x - 10\,000 > 0$ másodfokú egyenlőtlenség megoldásai az $\left]\dfrac{500}{3}; 500\right[$ intervallum elemei.

A krémgyártás nyereséges, ha a havonta gyártott mennyiség ≈ 167 kg-nál több, de 500 kg-nál kevesebb.

A nyereséget leíró függvénynek tehát $\dfrac{167 + 500}{2} \approx 333$-nál van maximuma, és ez a maximum
$-0{,}12 \cdot 333^2 + 80 \cdot 333 - 10\,000 \approx 3346$ (euró).

A krémgyártással elérhető legnagyobb havi nyereség kb. 3346 euró, és ez akkor lehetséges, ha 333 kg-ot termelnek.

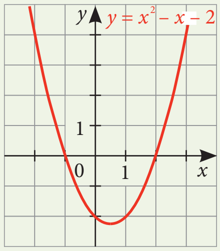
FELADAT

1 Ábrázold a következő függvényeket!
a) $x \mapsto x^2 + 2x$
b) $x \mapsto -x^2 - 3x$

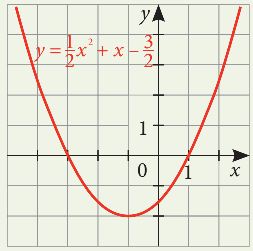
2 Oldd meg a következő másodfokú egyenlőtlenségeket!
a) $x^2 + 2x < 0$
b) $x^2 + 2x \geq 0$
c) $-x^2 - 3x \leq 0$
d) $-x^2 - 3x > 0$

3 A grafikonok segítségével oldd meg a másodfokú egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $x^2 - x - 2 \leq 0$



b) $\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} \geq 0$



4 A megoldóképlettel határozd meg a következő egyenletek gyökeit!

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$

b) $x^2 + 3{,}8x - 6 = 0$

c) $-x^2 - 1{,}5x + 1 = 0$

5 Az előző feladat segítségével oldd meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $x^2 + 3x - 4 > 0$

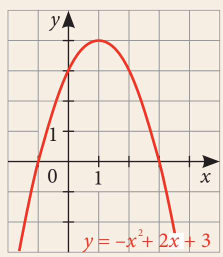
b) $x^2 + 3{,}8x - 6 \leq 0$

c) $-x^2 - 1{,}5x + 1 \geq 0$

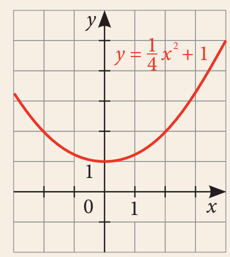
HÁZI FELADAT

1 A grafikonok segítségével oldd meg a másodfokú egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$



b) $\frac{1}{4}x^2 + 1 \geq 0$



2 Oldd meg a másodfokú egyenlőtlenségeket!

a) $x^2 - 5x \leq 0$ **b)** $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ **c)** $-x^2 + 5x \leq 0$ **d)** $-x^2 + 5x - 6 \leq 0$

Megoldásaidat ellenőrizheted *függvény-ábrázoló programmal* is.

3 Egy cég havi x kg kenőanyagot termel és ad el, kilogrammonként $(36 - 0{,}03x)$ euróért. A gyártás során felmerülő havi kiadást (költséget) a $0{,}1x^2 - 55x + 13\,000$ összefüggés adja meg, szintén euróban $(x \geq 0)$.
Havi hány kilogramm eladása esetén lesz a cégnek nyeresége a kenőanyag gyártásából?

4 Két diák így oldotta meg a $3x^2 - 12 < x + 2$ egyenlőtlenséget:

Csilla megoldása:	*Dóri megoldása:*
$3x^2 - 12 < x + 2;\quad 3x^2 - x - 14 < 0.$ Az $x \mapsto 3x^2 - x - 14$ függvény grafikonja felfelé nyitott parabola, a két zérushely között vesz fel negatív értékeket. Megkeressük a zérushelyeket: $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 3 \cdot 14}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{169}}{6} = \frac{1 \pm 13}{6}.$ $x_1 = \frac{7}{3},\ x_2 = -2.$ Ezért a $3x^2 - x - 14 < 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza a $\left]-2; \frac{7}{3}\right[$ intervallum.	$3x^2 - 12 < x + 2$ $3(x^2 - 4) < x + 2$ $3(x + 2)(x - 2) < x + 2 \quad / : (x + 2)$ $3(x - 2) < 1;\quad 3x - 6 < 1;\quad 3x < 7;\quad x < \frac{7}{3}$ Tehát a megoldáshalmaz a $\frac{7}{3}$-nál kisebb számok halmaza.

Melyik megoldás jó? Melyik megoldás egyszerű? Hogyan javítanád ki a hibás megoldást?

81 GYAKORLÁS

FELADAT

1 Ábrázold a koordinátarendszerben az $x \mapsto |x+3|$ függvényt, majd oldd meg az egyenlőtlenségeket:

a) $|x+3| > 0$
b) $|x+3| > 2$
c) $|x+3| > -1$

2 Oldd meg valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket!

a) $x^2 - 6x \leq 0$
b) $x^2 - 6x \leq -5$
a) $x^2 - 6x \leq -9$

3 Keress olyan számot az egyenlőtlenség jobb oldalára, hogy minden valós szám megoldása legyen az egyenlőtlenségnek! Melyik a legnagyobb ilyen valós szám?

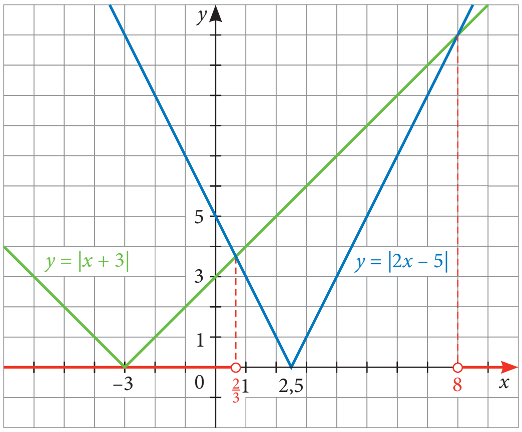
a) $x^2 + 7x \geq \square$
b) $2x^2 + 5x \geq \square$
c) $|3x - 8| \geq \square$
d) $|x - 1{,}5| + 2{,}5 \geq \square$

4 Oldd meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán! Mérlegelv segítségével rendezd egyszerűbb alakra az egyenlőtlenségeket!

a) $x + 3x^2 - 5 \leq x^2 - x + 7$
b) $\frac{x+1}{3} \leq \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{3}$
c) $(x+1)^2 > (2x+1)^2 + x$

KIDOLGOZOTT FELADAT

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:
$|x+3| < |2x-5|$!



Grafikus megoldás:
Közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk az $x \mapsto |x+3|$ és az $x \mapsto |2x-5|$ függvényt. A grafikonról úgy olvashatjuk le a megoldást, ha megkeressük azokat az x értékeket, melyek esetében $x \mapsto |x+3|$ grafikonja (zöld) „lejjebb” van, mint az $x \mapsto |x+3|$ függvény grafikonja (kék) – ugyanis ezen x esetén az $|x+3|$ helyettesítési értéke kisebb, mint az $|2x-5|$ helyettesítési értéke.
A két grafikon metszéspontjait felhasználva olvassuk le a megoldást:
$\left]-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup [8; +\infty[$.
Az x tengelyen pirossal jelöltük a megoldáshalmaz pontjait.

FELADAT

5 Oldd meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket!

a) $|2x| > x + 3$
b) $x^2 - 6x + 7 < 3 - x$
c) $|x| + 3 < -x^2 + 2{,}5x + 7{,}5$

HÁZI FELADAT

1 Ábrázold a koordinátarendszerben az $x \mapsto |2x-6|$ függvényt, majd oldd meg az egyenlőtlenségeket:

a) $|2x-6| > 0$

b) $|2x-6| > 2$

c) $|2x-6| > -3$

2 Oldd meg valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket!

a) $x^2 - 5x \geq 0$

b) $x^2 - 5x \leq -4$

a) $x^2 - 5x \leq -10$

3 Oldd meg valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket! Mérlegelv segítségével hozd egyszerűbb alakra!

a) $1 + 13x \geq 3x - 7 - 2x^2$

b) $\frac{3-2x}{2} \leq \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{2}$

c) $(x+1)^2 + (x+2)^2 > (x+3)^2$

RÁADÁS

1 Jocó tegnap bebizonyította barátainak, Döncinek és Bencének, hogy $3 < 2$. Ezt írta le:

- Ha $x < -3$, akkor $2x < -5$, ez könnyen belátható.
- Adjunk hozzá mindkét oldalhoz x^2-et, $4x$-et és még 9-et: $x^2 + 6x + 9 < x^2 + 4x + 4$.
- Mindkét oldalon teljes négyzet áll, tehát igaz, hogy $(x+3)^2 < (x+2)^2$.
- De akkor nyilván $x + 3 < x + 2$ is igaz.
- Mindkét oldalból elvéve x-et azt kapjuk, hogy $3 < 2$ is igaz, tehát bebizonyítottuk az állításunkat.

A fiúk nem jöttek rá, hol van itt a csalafintaság. Segíts nekik!

2 – Bebizonyítom, hogy ha egy szám nagyobb 2-nél, akkor ez a szám egyben kisebb is 2-nél, mondta Dönci Bencének.

Figyelj:

Ha $x > 2$, akkor $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$. Mindkét oldalt megszorzom a pozitív x-szel: $1 > \frac{x}{2}$, majd mindkét oldalt megszorzom 2-vel is: $2 > x$. Tehát az x kisebb 2-nél, és éppen ezt akartam bebizonyítani – fejezte be diadalmasan bizonyítását Dönci.

– Na várjunk csak! – mondta Bence. – Már látom is, hol hibáztál.

Milyen hibát talált Bence a bizonyításban? Hogyan javította ki Dönci „levezetését”?

3 Egyenlőtlenségek megoldásához felhasználhatjuk a következő megállapítást is: *Ha két szám négyzete egyenlő, akkor egyenlő az abszolút értékük; ha a négyzetük nem egyenlő, akkor annak nagyobb a négyzete, amelyiknek az abszolút értéke nagyobb.*

Ez alapján oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

a) $(x+3)^2 < 25$ **b)** $(x+3)^2 \leq (2x-5)^2$

Ráadás

MÁS MÓDSZEREKKEL IS DOLGOZHATUNK

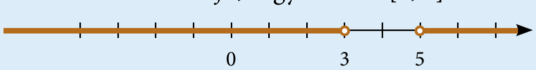
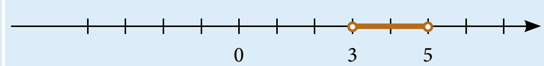
KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Oldjuk meg a mérlegelv és a teljes négyzetté kiegészítés módszerével a következő egyenlőtlenségeket!

a) $x^2 - 8x + 15 > 0$ **b)** $x^2 - 8x + 15 < 0$

Megoldás

<table>
<tr><td>a) $x^2 - 8x + 15 > 0$</td><td>b) $x^2 - 8x + 15 < 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">A másodfokú polinomot teljes négyzetté alakítjuk: $x^2 - 8x + 15 = (x - 4)^2 - 1$.

Az egyenlőtlenség új alakja:</td></tr>
<tr><td>$(x - 4)^2 - 1 > 0$; $(x - 4)^2 > 1$</td><td>$(x - 4)^2 - 1 < 0$; $(x - 4)^2 < 1$</td></tr>
<tr><td>Melyik számok négyzete nagyobb 1-nél?
Az 1-nél nagyobb számoké és a (-1)-nél kisebb számoké.
Ezért $(x - 4)^2$ akkor és csakis akkor nagyobb 1-nél, ha
$x - 4 > 1$ VAGY $x - 4 < -1$.</td><td>Melyik számok négyzete kisebb 1-nél?
A -1 és az 1 közötti számoké.
Ezért $(x - 4)^2$ akkor és csakis akkor kisebb 1-nél, ha
$-1 < x - 4$ ÉS $x - 4 < 1$.</td></tr>
<tr><td>Ebből a két egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy
$x > 5$ VAGY $x < 3$.</td><td>Ebből a két egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy
$3 < x$ ÉS $x < 5$.
(Ezt röviden így szoktuk írni: $3 < x < 5$.)</td></tr>
<tr><td>Tehát az $x^2 - 8x + 15 > 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza a 3-nál kisebb számok és az 5-nél nagyobb számok halmazának az uniója, vagyis az $\mathbf{R} \setminus [3; 5]$ halmaz.

</td><td>Tehát az $x^2 - 8x + 15 < 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza a 3 és 5 közötti számok halmaza, vagyis a $]3; 5[$ halmaz.

</td></tr>
</table>

2. Oldjuk meg az $(x - 2)(x^2 - 5x + 4) > 0$ egyenlőtlenséget!

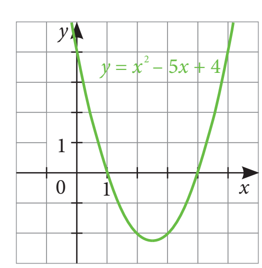
Megoldás

Ha a két polinom szorzását elvégeznénk, akkor harmadfokú polinomot kapnánk, amelyet nem tudunk kezelni. De nincs erre szükség, hiszen az egyenlőtlenség bal oldalán egy kéttényezős szorzat, a jobb oldalán pedig a nulla áll. Egy kéttényezős szorzat pedig pontosan akkor nagyobb nullánál (azaz akkor pozitív), ha mindkét tényezője pozitív, VAGY mindkét tényezője negatív. Tehát:

$x - 2 > 0$ ÉS $x^2 - 5x + 4 > 0$, VAGY $x - 2 < 0$ ÉS $x^2 - 5x + 4 < 0$.

Kicsit egyszerűbben:

$x > 2$ ÉS $x^2 - 5x + 4 > 0$, VAGY $x < 2$ ÉS $x^2 - 5x + 4 < 0$.



Láthatjuk, hogy elég az $x \mapsto x^2 - 5x + 4$ másodfokú függvény grafikonját megrajzolni a továbblépéshez.

Ennek a függvénynek a zérushelyei az 1 és a 4, grafikonja pedig felfelé nyitott parabola.

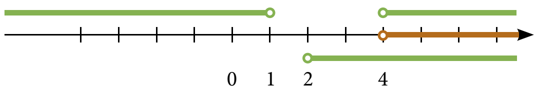
$x^2 - 5x + 4 < 0$ pontosan akkor, ha $1 < x < 4$,

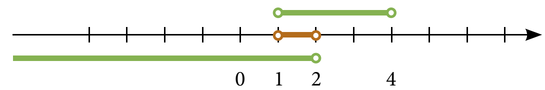
$x^2 - 5x + 4 > 0$ pontosan akkor, ha $x < 1$ vagy $x > 4$.

Visszatérve az eredeti problémára:

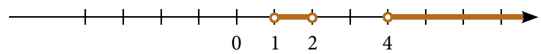
$x > 2$ ÉS $x^2 - 5x + 4 > 0$, VAGY $x < 2$ ÉS $x^2 - 5x + 4 < 0$,

$x > 2$ ÉS $(x < 1$ vagy $x > 4)$, VAGY $x < 2$ ÉS $1 < x < 4$.





Az első eset csak $x > 4$ esetén, a második pedig $1 < x < 2$ esetén teljesül.
Az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmazát tehát az 1 és 2 közötti számok, valamint a 4-nél nagyobb számok alkotják.



Az egyenlőtlenséget táblázat segítségével is vizsgálhatjuk:
Az $x \mapsto x^2 - 5x + 4$ másodfokú függvény zérushelyei: $x_1 = 1$ és $x_2 = 4$. A függvény felfelé nyitott parabola, tehát a két zérushely között negatív, az $x < 1$ és az $x > 4$ intervallumokon pedig pozitív értéket vesz fel. A szorzat másik tényezője egy elsőfokú függvény: $x - 2$, amelynek zérushelye az $x_3 = 2$, meredeksége pedig pozitív, tehát 2-nél kisebb x értékekre a függvény értéke negatív, nagyobbakra pedig pozitív. Most készítsünk el egy táblázatot, amiben jelöljük az összes zérushelyet, valamint a közöttük lévő intervallumokat és írjuk be a táblázatba, hogy a szorzat két tényezőjének mi az előjele!

A függvény:	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 4$	$x = 4$	$4 < x$
$x^2 - 5x + 4$	+	0	–	–	–	0	+
$x - 2$	–	–	–	0	+	+	+
A szorzat: $(x - 2)(x^2 - 5x + 4)$	–	0	+	0	–	0	+

A táblázat utolsó sorából leolvasható, hogy a szorzatfüggvény mely intervallumokon milyen előjelű.

Milyen lenne ugyanez a táblázat az $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 2}$ $(x \neq 2)$ függvény előjelének vizsgálatakor?

FELADAT

1 Oldd meg a teljes négyzetté alakítás módszerével a következő egyenlőtlenségeket!

a) $x^2 - x - 2 < 0$ **c)** $x^2 - x + 1 < 0$

b) $x^2 - x - 2 > 0$ **d)** $x^2 - x + 1 > 0$

2 **a)** Oldd meg az $(x + 3)(x^2 - 2x - 15) < 0$ egyenlőtlenséget!

b) Oldd meg grafikus úton az $\dfrac{x + 2}{x^2 + 2x - 3} < 0$ egyenlőtlenséget!

Megoldásaidat ellenőrizheted *függvény-ábrázoló programmal* is.

HÁZI FELADAT

1 Oldd meg a teljes négyzetté alakítás módszerével a következő egyenlőtlenségeket!

a) $x^2 - 10x + 21 < 0$ **c)** $x^2 - 8x + 17 \leq 0$

b) $x^2 - 10x + 21 > 0$ **d)** $x^2 - 8x + 17 \geq 0$

2 Oldd meg grafikusan is és szorzattá alakítással is a következő egyenlőtlenségeket!

a) $x^2 - 5x \leq 0$ **c)** $4x - x^2 < 0$

b) $2x^2 + 7x \geq 0$ **d)** $x^2 - 8x + 7 \leq 0$

82 ÚJ ISMERETLEN BEVEZETÉSE

KIDOLGOZOTT FELADAT

Melyik szám lehet a számrendszer x alapszáma, ha $1003002_x = 4290$?

Megoldás

Készítsünk helyiérték-táblázatot!

Helyi érték	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1
Alaki érték	1	0	0	3	0	0	2
Valódi érték	x^6	0	0	$3x^3$	0	0	2

Tehát $x^6 + 3x^3 + 2 = 4290$, vagy másképp:

$x^6 + 3x^3 - 4288 = 0$.

Itt az x egy 3-nál nagyobb egész szám.

Hatodfokú egyenletet kellene megoldanunk. Erre nincs semmilyen módszerünk. Ha azonban észrevesszük, hogy $x^6 = (x^3)^2$, akkor mindjárt egyszerűvé tehetjük a feladatot. Jelöljük egy betűvel, például y-nal az x^3-t. Ekkor $x^6 = y^2$, egyenletünk pedig ilyen lesz:

$y^2 + 3y - 4288 = 0$.

Egy új ismeretlen bevezetésével a *hatodfokú* egyenlet helyett *másodfokút* kaptunk. Ezt a megoldóképlettel megoldjuk:

$$y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 4288}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17\,161}}{2} = \frac{-3 \pm 131}{2},$$

$y_1 = 64$, $\quad y_2 < 0$, itt nem jöhet szóba.

Eszerint $x^3 = 64 = 4^3$, vagyis $x = 4$.

Ellenőrzés

$4^6 + 3 \cdot 4^3 + 2 = 4096 + 3 \cdot 64 + 2 =$

$= 4096 + 192 + 2 = 4290$.

Tehát a számrendszer alapszáma: 4.

FELADAT

1 Oldd meg **új ismeretlen bevezetésével** az egyenleteket!

a) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$
b) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$
c) $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$
d) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

2 Van-e olyan x valós szám, amely esetében

$x^8 + \frac{1}{x^8} = 2$?

(Segítség: vezess be új ismeretlent; jelöld y-nal az x^8-t!)

3 A következő egyenletben α egy hegyesszöget jelöl.

$5\sin^2 \alpha - 26\sin \alpha + 5 = 0$

Vezessünk be új ismeretlent: $y = \sin \alpha$. Oldd meg y-ra az egyenletet!

Figyeld meg, hogy az y-ra kapott két megoldás közül egyik lehet egy hegyesszög szinusza, a másik nem. Melyik eredmény lehet? Mekkora az α?

4 A következő egyenletekben α egy hegyesszöget jelöl. Vezess be új ismeretlent, majd oldd meg az egyenleteket!

a) $3\cos^2 \alpha + 7\cos \alpha - 6 = 0$
b) $2\mathrm{tg}^2\, \alpha + 7\mathrm{tg}\, \alpha - 4 = 0$

5 Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszögét jelöljük α-val. Mekkorák a háromszög szögei, ha teljesül α-ra a következő egyenlet:

a) $7\sin^2 \alpha - 5\sin \alpha + \cos^2 \alpha = 0$
b) $2\cos^2 \alpha + 7\cos \alpha - 2\sin^2 \alpha = 0$

(Alkalmazd a tanult azonosságot:
$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.)

HÁZI FELADAT

1 Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

a) $x^4 - 16 = 0$

b) $x^6 - 64 = 0$

c) $x^6 - x^4 = 0$

d) $x^6 + x^4 = 0$

2 Oldd meg új ismeretlen bevezetésével az egyenleteket!

a) $25x^4 + 46x^2 - 8 = 0$

b) $x^2 + \frac{36}{x^2} = 13$

c) $x^4 + (x^2 - 2)^2 = x^2(16 - x^2) - 28$

d) $x^{10} - 33x^5 + 32 = 0$

3 A következő egyenletekben α egy hegyesszöget jelöl. Vezess be új ismeretlent, majd oldd meg az egyenleteket!

a) $2\cos^2\alpha + 11\cos\alpha - 6 = 0$

b) $4\sin^2\alpha + 13\sin\alpha - 12 = 0$

RÁADÁS

1 Melyik egyjegyű pozitív egész szám gyöke az $(x^2 - 5)^2 = 3x^2 - 11$ egyenletnek? Kísérletezz!

2 Oldjuk meg **új ismeretlen bevezetésével** az $(x^2 - 4x)^2 = 18(x^2 - 4x) + 63$ egyenletet!

Megoldás

Új ismeretlent többtagú kifejezésre is bevezethetünk. Az egyenletet figyelmesen nézve láthatjuk, hogy szerepel benne az $(x^2 - 4x)$ és ennek a négyzete, $(x^2 - 4x)^2$ is. Jelöljük például w-vel az $(x^2 - 4x)$-et. Ekkor tehát $w = x^2 - 4x$ és $w^2 = (x^2 - 4x)^2$.

Az $(x^2 - 4x)^2 = 18(x^2 - 4x) + 63$ egyenlet helyett ezt írhatjuk: $w^2 = 18w + 63$. Ez másodfokú egyenlet. Nullára rendezzük, és megoldóképlettel megoldjuk: $w^2 - 18w - 63 = 0$. Ebből $w_1 = 21$ és $w_2 = -3$.

Tudjuk tehát, hogy w milyen számot jelenthet. De az x helyébe mi kerüljön?

Mivel $w = x^2 - 4x$, ezért két eset lehetséges: $21 = x^2 - 4x$, vagy $-3 = x^2 - 4x$. Most két másodfokú egyenletet kaptunk, ezek megoldásai adják az eredeti egyenlet megoldásait.

Az $x^2 - 4x - 21 = 0$ egyenletnek két gyöke van: 7 és -3.

Az $x^2 - 4x + 3 = 0$ egyenletnek is két gyöke van: 1 és 3.

Az eredeti egyenletnek tehát négy gyöke van, megoldáshalmaza: $\{-3; 1; 3; 7\}$.

3 Alakítsd át az $(x^2 - 5)^2 = 3x^2 - 11$ egyenletet így: $(x^2 - 5)^2 = 3(x^2 - 5) + 4$, majd oldd meg a valós számok halmazán **új ismeretlen bevezetésével**!

4 Keress kapcsolatot a következő egyenletek között, és oldd meg őket új ismeretlen bevezetésével!

a) $(y + 5)^2 - 6 = y + 5$

b) $z - 5 - \sqrt{z - 5} = 6$

5 Keress kapcsolatot a következő egyenletek között, és oldd meg őket új ismeretlen bevezetésével!

a) $6\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 26 = 25\left(x + \frac{1}{x}\right)$

b) $6\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + 38 = 25\left(y + \frac{1}{y}\right)$

6 Oldd meg új ismeretlen bevezetésével és anélkül is a $\sqrt{x + 4 - 4\sqrt{x}} + \sqrt{x + 1 + 2\sqrt{x}} = 3$ egyenletet!

Útmutatás

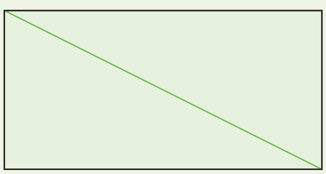
– Ha pl. u-val jelölöd a $\sqrt{x}$-et, akkor az egyenletből könnyen eljuthatsz az $|u - 2| + |u + 1| = 3$ egyenlethez, amelynek megoldáshalmaza a [0; 2] intervallum. Visszatérve az x-hez kiderül, hogy az eredeti egyenletnek is végtelen sok gyöke van, a megoldáshalmaza a [0; 4] intervallum.

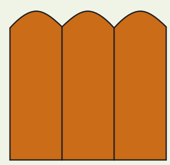
– Ha az egyenletet új ismeretlen bevezetése nélkül, kétszeri négyzetre emeléssel oldod meg, akkor az előálló következményegyenletnek a valós számok halmaza lesz a megoldáshalmaza. Ebből nem tudod kiszűrni a hamis gyököket! Próbáld a számítás során kapott egyenletek értelmezési tartományát menet közben úgy leszűkíteni, hogy végül megkapd a helyes megoldáshalmazt!

83 EGYENLETRENDSZEREK A GEOMETRIÁBAN I.

FELADAT

1 Az ábrán látható téglalap alakú virágágy területe 4,8 m^2. A virágágyat 10 cm széles, szorosan egymás mellé illesztett elemekből álló „szalagkerítéssel” veszik körül. Összesen 92 elemet használnak fel. Mekkora a legnagyobb távolság a virágágy két pontja között?





Megoldásod során kövesd az alábbiakban megadott útmutatót!

a) Fogalmazd meg ezt a problémát matematikai feladatként! (Milyen síkidomot vizsgálunk, hány dm^2 a területe, mekkora a kerülete, mit kell kiszámítanunk?)

b) Először számítsd ki a téglalap oldalhosszúságait!
Ha az egyik oldal x dm-es, a másik pedig y dm-es, akkor a téglalap területe is és a kerülete is kifejezhető x-szel és y-nal. Fejezd is ki őket! Ha nem hibáztál, akkor az $\left.\begin{aligned} xy &= 480 \\ x + y &= 46 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszert kapod.
Itt mindkét egyenlet kétismeretlenes, az első egyenlet *másodfokú*, a második *elsőfokú*. Ez a két egyenlet egy *másodfokú kétismeretlenes egyenletrendszert* alkot.

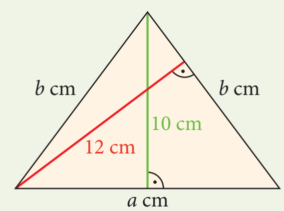
c) Oldd meg ezt az egyenletrendszert! Fejezd ki a második egyenletből az y-t! A kapott kifejezést helyettesítsd be az első egyenletben az y helyébe!
Rendezés után az $x^2 - 46x + 480 = 0$ egyenletet kell megkapnod. Oldd meg ezt a megoldóképlettel!
Az x mindkét értékéhez tartozik az y-nak egy értéke. Ha jól számoltál, azt kapod, hogy az adott egyenletrendszer megoldása a (30; 16) és a (16; 30) számpárokból álló halmaz.

d) Mit jelent ez a virágágyunkra vonatkozóan?

e) Mekkora a téglalap átlója? Számítsd ki Pitagorasz tétele segítségével!

f) Tehát mekkora távolságra van egymástól a virágágy két legtávolabbi pontja?

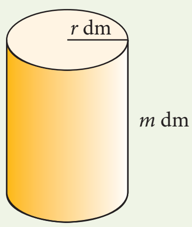
2 Egy egyenlő szárú háromszögben az alaphoz tartozó magasság 10 cm hosszú, a szárhoz tartozó magasság 12 cm hosszú. Mekkorák a háromszög oldalai?



Kövesd az útmutatót!

– Ha az alap a cm hosszú, a szárak pedig b cm-esek, akkor kétféleképpen is felírhatod a háromszög területét: $t = \frac{a \cdot 10}{2} = 5a$ és $t = \frac{b \cdot 12}{2} = 6b$.
Milyen egyszerű összefüggést kapsz ebből az a és a b között?
– Írd fel a Pitagorasz-tételt az egyenlő szárú háromszög egyik „felére”! Ebből egy újabb összefüggést kapsz az a és a b között.
– Az a és b közötti két összefüggésből alkoss egy egyenletrendszert, és oldd meg!

3 Egy forgáshenger alakú edénybe 2 liter 4 dl víz fér. A hengerpalást területe 6 dm^2. Mekkora az edény sugara és átmérője?



Kövesd az útmutatót!

– Számolj dm-ben! Írj fel az adatok (henger térfogata, hengerpalást területe) alapján kétismeretlenes egyenletrendszert (az ismeretlenek r és m)!
– Hozd egyszerűbb alakra: mennyi az rm, és mennyi az r^2m értéke?
– Számítsd ki az egyenletrendszer segítségével, mekkora az edény sugara!
– Mekkora az edény átmérője?

4 Egy szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja háromszor olyan hosszú, mint a rövidebbik alapja. Területe 187 cm^2. A hosszabbik alapnak és a trapéz magasságának az összege 50 cm.

a) Mekkorák a trapéz alapjai és magassága?

b) Milyen hosszúak a trapéz szárai?

HÁZI FELADAT

1 Egy 720 m^2 területű, téglalap alakú telek bekerítéséhez legkevesebb 108 méter hosszú dróthálóra van szükség.
Mekkora a telek két legtávolabbi pontjának távolsága?

2 Egy 70 cm hosszú nádszál segítségével rombusz alakú papírsárkányt készítettünk. A nádszálat két részre vágtuk, és ez a két darab lett a rombusz két átlója. Így a sárkánytest területe 6 dm^2 lett.

a) Milyen hosszú spárga kellett a sárkánytest kerületének elkészítéséhez?

b) A papírsárkány díszítéséhez egy színes körlapot festünk a papírsárkányra. A sárkány területének legfeljebb hány százalékát festhetjük be?

3 Egy konvex deltoid területe 1380 cm^2, a két átló hosszának összege pedig 109 cm.

a) Mekkorák az átlók?

b) Ha a deltoid egyik oldalának hossza 52 cm, akkor mekkora lehet a kerülete?

c) Mekkora a deltoid kerülete, ha az átlói kölcsönösen felezik egymást?

RÁADÁS

FELADAT

Egy konvex deltoid területe 1365 cm^2, a két átló hosszának összege pedig 107 cm.

a) Mekkorák a deltoid átlói?

b) A feltételeknek megfelelő deltoidok közül mekkorák a legkisebb kerületűnek az oldalai?

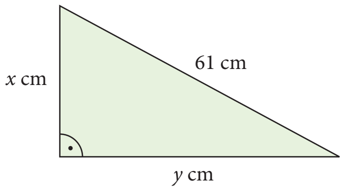
c) Van-e legnagyobb kerületű a feltételeknek megfelelő deltoidok között?

84 EGYENLETRENDSZEREK A GEOMETRIÁBAN II.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy derékszögű háromszög területe 330 cm^2, az átfogója 61 cm-es. Mekkorák a befogói?

Megoldás



Írjuk fel az x és az y segítségével a háromszög területét és átfogójának hosszát! Ez utóbbihoz felhasználjuk a Pitagorasz-tételt is.

$$\left.\begin{aligned}\frac{xy}{2} &= 330\\ x^2+y^2 &= 61^2\end{aligned}\right\};\qquad \left.\begin{aligned}xy &= 660\\ x^2+y^2 &= 3721\end{aligned}\right\}.$$

Az első egyenletből: $y=\frac{660}{x}$. Ezt behelyettesítjük a második egyenletbe:

$$x^2+\left(\frac{660}{x}\right)^2=3721;\quad x^2+\frac{435\,600}{x^2}=3721.$$

Az x^2 helyett vezessünk be új ismeretlent, például az u-t!

Ekkor egyenletünk így alakul:

$$u+\frac{435\,600}{u}=3721;$$

$$u^2+435\,600=3721u;$$

$$u^2-3721u+435\,600=0.$$

Megoldóképlettel:

$$u_{1,2}=\frac{3721\pm\sqrt{3721^2-4\cdot 435\,600}}{2}=\frac{3721\pm 3479}{2};$$

$$u_1=3600;\quad u_2=121.$$

Az x tehát olyan **pozitív** számot jelöl, amelynek a négyzete 3600 vagy 121. Tehát $x_1=60$ és $x_2=11$.

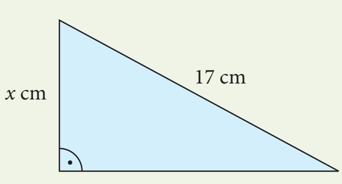
Számításunk azt mutatja, hogy a vizsgált háromszög egyik befogójának hossza 60 cm vagy 11 cm. A másik befogó hosszát az $y=\frac{660}{x}$ egyenletből kapjuk meg:

$$y_1=\frac{660}{x_1}=\frac{660}{60}=11\quad\text{és}\quad y_2=\frac{660}{x_2}=\frac{660}{11}=60.$$

Tehát egyféle háromszög felel meg a feladatunk feltételeinek, ennek az egyik befogója 11 cm, a másik 60 cm hosszúságú.

FELADAT

1 Egy derékszögű háromszög kerülete 40 cm, az átfogója 17 cm-es. Mekkorák a befogói?



Útmutatás

Írd fel az x és az y segítségével a kerületet, és használd a Pitagorasz-tételt!

2 Egy 105 cm hosszú nádszál segítségével rombusz alakú papírsárkányt készítünk. A nádszálat két részre vágjuk, ezek lesznek a rombusz átlói. A sárkánytest kerületének elkészítéséhez 150 cm hosszú spárgára van szükség. Mekkora a sárkánytest területe?

3 Egy deltoid körbe írható, azaz húrnégyszög. Kerülete 56 cm. Hosszabbik átlója 20 cm.

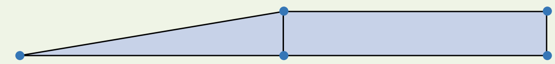
a) Mekkorák a deltoid oldalai?

b) Mekkora a köré írható kör sugara?

c) Mekkora a területe?

d) Mekkora a rövidebbik átlója?

4 Egy ék keresztmetszete látható az ábrán. A keresztmetszet trapéz alakú, egy téglalapból és egy hozzá illeszkedő derékszögű háromszögből áll. A derékszögű háromszög befogói ugyanolyan hosszúak, mint a téglalap oldalai.



A trapéz területe 540 mm^2. A trapéz hosszabbik szára 41 mm.
Milyen hosszú a trapéz többi oldala?

5 Egy derékszögű háromszög területe 420 mm^2, egyik befogójához tartozó súlyvonala 37 mm.
Milyen hosszúak a háromszög oldalai?

HÁZI FELADAT

1 Egy derékszögű háromszög kerülete 12 dm, egyik befogójának hossza 2 dm.

a) Mekkora a háromszög másik két oldala?

b) A háromszög területe hány százaléka a körülírt köre területének?

2 Egy húrtrapéz két alapja együtt 20 cm hosszú, a trapéznak van beírt köre (tehát érintőnégyszög).

a) Mekkorák a trapéz szárai?

b) A beírt kör sugara 4 cm. Mekkorák a trapéz alapjai?

c) A trapéz területének hány százalékát fedi le a beírt köre?

3 Egy rombusz kerülete 104 cm, területe 480 cm^2. Mekkorák a rombusz átlói?

4 Egy konvex deltoid egyik oldala 13 cm, másik oldala 15 cm hosszú. A deltoid szimmetriatengelyét a másik átló 5 : 9 arányú részekre osztja.

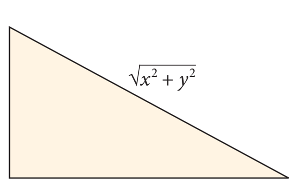
a) Mekkorák a deltoid átlói?

b) Mekkora a deltoid területe?

c) Mekkora a deltoid beírt körének sugara? (Az érintőnégyszög beírt körének sugarát a terület és a kerület felének hányadosaként is kiszámolhatod.)

RÁADÁS

1. Egy derékszögű háromszög területe 180 cm^2, kerülete 90 cm. Mekkorák a háromszög oldalai?



Kövesd az útmutatót!

– Írd fel az x és az y segítségével a két adatot!

Ha nem hibáztál, akkor az

$$\left.\begin{aligned} xy &= 360 \\ \sqrt{x^2+y^2} &= 90-(x+y) \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kapod.

– Emeld négyzetre a második egyenlet két oldalán álló kifejezéseket! Ha figyelembe veszed az első egyenletet is ($xy = 360$), akkor ebből az $x + y = 49$ egyenletet kapod.

– Oldd meg az $\left.\begin{aligned} xy &= 360 \\ x+y &= 49 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszert!

– Mekkorák a háromszög oldalai?

85 EGYENLETRENDSZEREK KÉTJEGYŰ SZÁMOKRÓL

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Melyik az a kétjegyű szám, amely 18-cal nagyobb a fordítottjánál, és a négyzete 1188-cal nagyobb a fordított szám négyzeténél.

Megoldás

A keresett szám első számjegyét u-val, a másodikat v-vel jelölik.

Ekkor ez a szám $(10u+v)$-vel, a fordítottja $(10v+u)$-val egyenlő.

A feltételek szerint: $\begin{cases} 10u+v = 10v+u+18 \\ (10u+v)^2 = (10v+u)^2+1188 \end{cases}$

Rendezzük át az első egyenletet, és használjuk a mérlegelvet!

$10u+v = 10v+u+18;\quad 9u = 9v+18;\quad u = v+2.$

Hogyan folytassuk?

Lehet algebrai átalakításokkal tovább lépni. De mivel kétjegyű számokról van szó, melyekről most már azt is tudjuk, hogy a második számjegyük 2-vel nagyobb, mint az első számjegyük (ezt jelenti az utolsó egyenletként felírt u = v +2), lehet úgy is folytatni, hogy kipróbáljuk a szóba jövő számokat.

Vera módszere	Gáspár módszere
a) Egyszerűbb alakra hozza a második egyenletet: $(10u+v)^2 = (10v+u)^2+1188$ $100u^2+20uv+v^2 = 100v^2+20uv+u^2+1188$ $99u^2 = 99v^2+1188 \qquad /:99$ $u^2 = v^2+12$ b) Megoldja az $\left.\begin{matrix} u = v+2 \\ u^2 = v^2+12 \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszert. A második egyenletbe az u helyére beírja a $(v+2)$-t, rendezi az egyenletet: $(v+2)^2 = v^2+12;\quad v^2+4v+4 = v^2+12;$ $4v = 8;\quad v = 2.$ Ha $v = 2$, akkor $u = 4$, vagyis az egyenletrendszernek egy megoldása van, a (4; 2) rendezett számpár. Tehát a keresett szám a 42.	a) Felsorolja a szóba jövő kétjegyű számokat: 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97. b) Összehasonlítja ezeknek a számoknak a négyzetét a fordítottjuknak a négyzetével, kiszámítja a különbségeket: a 20 fordítottja a 2, $20^2-2^2 = 400-4 \neq 1188;$ a 31 fordítottja a 13, $31^2-13^2 = 961-169 \neq 1188;$ a 42 fordítottja a 24, $42^2-24^2 = 1764-576 = 1188;$ az 53 fordítottja a 35, $53^2-35^2 = 2809-1225 \neq 1188;$ a 64 fordítottja a 46, $64^2-46^2 = 4096-2116 \neq 1188;$ a 75 fordítottja az 57, $75^2-57^2 = 5625-3249 \neq 1188;$ a 86 fordítottja a 68, $86^2-68^2 = 7396-4624 \neq 1188;$ a 97 fordítottja a 79, $97^2-79^2 = 9409-6241 \neq 1188.$ Tehát a keresett szám a 42.

2. Nézzünk egy harmadik módszert a megoldásra! Ennek során nem a számjegyekről, hanem a kétjegyű számokról írunk fel egyenletrendszert.

Két számról, az x-ről és az y-ról azt tudjuk, hogy:

$\begin{cases} x = y+18 \\ x^2 = y^2+1188 \end{cases}$

A második egyenletben x helyébe beírva $(y+18)$-at:

$(y+18)^2 = y^2+1188;$

$y^2+36y+324 = y^2+1188;\qquad 36y = 864,$ ezért

$y = 24$, és így $x = 24+18 = 42.$

Tehát az a két szám, amelyek különbsége 18 és négyzetük különbsége 1188, a 42 és a 24. Ezek kétjegyűek, egymás megfordítottjai, tehát az összes feltétel teljesül rájuk. Vagyis a keresett szám a 42.

FELADAT

1 Melyik az a kétjegyű szám, amely 4-szer akkora, mint a számjegyeinek az összege, és 2-szer akkora, mint a számjegyeinek a szorzata?

2 Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 5-tel kisebb, mint a számjegyek szorzata. Ez a szám úgy aránylik a fordítottjához, mint a 8 a 3-hoz. Melyik ez a szám?

3 Egy kétjegyű szám 36-tal nagyobb, mint a fordítottja. A számnak és a fordítottjának a szorzata 1612. Melyik ez a szám?

4 Oldd meg valós számok halmazán az egyenletrendszereket!

a) $\left.\begin{array}{r} xy + 3x = -9 - 3y \\ x + y = 8 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + xy = -19 \\ xy = -56 \end{array}\right\}$

5 Oldd meg valós számok halmazán az egyenletrendszereket!

a) $\left.\begin{array}{r} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ x + y = \frac{16}{15} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{34}{15} \\ x^2 + y^2 = 34 \end{array}\right\}$

HÁZI FELADAT

1 Egy kétjegyű szám 2-szer akkora, mint a számjegyeinek a szorzata. A szám úgy aránylik a fordítottjához, mint a 4 a 7-hez. Melyik ez a szám?

2 Egy kétjegyű szám számjegyeinek a négyzetösszege 41. A számnak és a fordítottjának a szorzata 2430. Melyik lehet ez a szám?

3 Dönci azt mondta, hogy ilyen feladatokat ő is könnyen tud „gyártani".
– No, mondj egyet! – kérte őt Bence.
– Egy kétjegyű szám 28-cal nagyobb a fordítottjánál…
– Ne folytasd! – vágott közbe Bence. – Nincs megoldása a feladatnak!
– De még nem is mondtam meg a számjegyek négyzetének összegét – képedt el Dönci.
– Mindegy az! – válaszolta Bence.
Igaza volt-e Bencének?

RÁADÁS

Egy újabb érdekes megoldás a leckében szereplő kidolgozott feladathoz:

– *Két szám különbségét és a négyzetük különbségét ismerjük. Megkeresem ezeket a számokat, azután ellenőrzöm, hogy a nagyobbik szám kétjegyű-e, és a másik éppen a megfordítottja-e.*

$x^2 - y^2 = 1188$, $(x + y)(x - y) = 1188$.

Mivel $x - y = 18$, ezért az előbbi egyenletből:

$x + y = 1188 : 18 = 66$.

Tehát csak az $\left.\begin{array}{r} x + y = 66 \\ x - y = 18 \end{array}\right\}$ egyenletrendszert kell megoldanunk.

A bal és a jobb oldalak összeadásával, illetve kivonásával azt kapjuk, hogy $2x = 84$, illetve $2y = 48$.

Ezért $x = 42$ és $y = 24$.

A 42 minden feltételnek megfelel, tehát ez a keresett kétjegyű szám.

Ráadás

EGYEDI MÓDSZEREK

BEVEZETŐ

A másodfokú egyenleteknél tanultuk a Viète-formulákat:

Ha az $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$ másodfokú egyenletnek van két valós gyöke, x_1 és x_2, akkor teljesül, hogy $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$; és $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

Alkalmazzuk ezt a tételt az egyenletrendszerek megoldásánál!

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Oldjuk meg a Viète-formulák segítségével a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} xy &= 360 \\ x + y &= 49 \end{aligned}\right\}!$$

Megoldás:

A Viète-formulák szerint a $z^2 - 49z + 360 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei (ha ezek léteznek) éppen x és y. Ezeket könnyen megkapjuk a megoldóképlettel:

$$z_{1,2} = \frac{49 \pm \sqrt{49^2 - 4 \cdot 360}}{2} = \frac{49 \pm 31}{2};$$

$z_1 = 40$; $z_2 = 9$.

Tehát $x = 40$ és $y = 9$, vagy $x = 9$ és $y = 40$.

2. Oldjuk meg az egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} xy &= 60 \\ x^2 + y^2 &= 169 \end{aligned}\right\}$$

Megoldás:

Az első egyenlet kétszeresét hozzáadjuk a másodikhoz, illetve kivonjuk a másodikból:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 169 + 120,$$
$$\Updownarrow$$
$$(x + y)^2 = 289; \quad x + y = \pm 17;$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = 169 - 120,$$
$$\Updownarrow$$
$$(x - y)^2 = 49; \quad x - y = \pm 7.$$

Most részekre bontjuk az eredményét, és négy igen egyszerű elsőfokú egyenletrendszert oldhatunk meg:

a) $x + y = 17$ és $x - y = 7$, ebből (az „egyenletek összeadásával”) $2x = 24$ és („kivonással”) $2y = 10$. Tehát: $x = 12$; $y = 5$.

Hasonlóan eljárva kapjuk a többi eredményt is.

b) $x + y = 17$ és $x - y = -7$, ebből $x = 5$; $y = 12$;

c) $x + y = -17$ és $x - y = 7$, ebből $x = -5$; $y = -12$;

d) $x + y = -17$ és $x - y = -7$, ebből $x = -12$; $y = -5$.

Tehát az $\left.\begin{aligned} xy &= 60 \\ x^2 + y^2 &= 169 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldáshalmaza: $\{(12; 5); (5; 12); (-5; -12); (-12; -5)\}$.

3. Oldjuk meg a Viète-formulák segítségével az egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} xy &= 60 \\ x^2 + y^2 &= 169 \end{aligned}\right\}!$$

Megoldás:

Az első egyenletből láthatjuk, hogy $x^2y^2 = 3600$, és a két ismeretlen értéke azonos előjelű (hiszen xy pozitív szám, 60).

Ebből a $z^2 - 169z + 3600 = 0$ másodfokú egyenletet írhatjuk fel, mert ennek a gyökei (ha léteznek) éppen x^2 és y^2.

$$z_{1,2} = \frac{169 \pm \sqrt{169^2 - 4 \cdot 3600}}{2} = \frac{169 \pm 119}{2};$$

$z_1 = 144$; $z_2 = 25$.

Tehát $x^2 = 144$ és $y^2 = 25$, ami azt jelenti, hogy $x = \pm 12$ **és** $y = \pm 5$, **vagy**

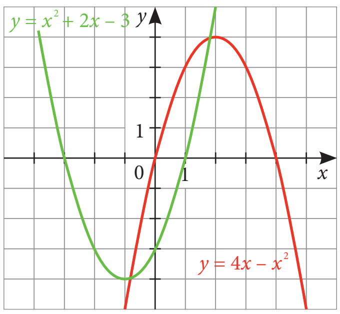
$x^2 = 25$ és $y^2 = 144$, ami azt jelenti, hogy $x = \pm 5$ **és** $y = \pm 12$.

Azonos előjelű rendezett párokat alkotva megkapjuk az $\left.\begin{aligned} xy &= 60 \\ x^2 + y^2 &= 169 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldáshalmazát:

$\{(12; 5); (5; 12); (-5; -12); (-12; -5)\}$.

4. Oldjuk meg **R**-en az $(x^2 + 2x - 3)(4x - x^2) \geq 0$ egyenlőtlenséget!

Megoldás:
Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az
$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto x^2 + 2x - 3$ és a
$g: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 4x - x^2$ függvényt!



Az f zérushelyei (-3) és 1, ezeket például a megoldóképlettel kaphatjuk meg.
A g zérushelyei 0 és 4, ezt az x kiemelése után látjuk.
Az f esetében a másodfokú tag együtthatója pozitív, tehát olyan, „felfelé” nyitott parabolát kell rajzolnunk, amely a (-3) és az 1 helyen metszi az abszcisszatengelyt. A g esetében a másodfokú tag együtthatója negatív, tehát olyan, „lefelé” nyitott parabolát kell rajzolnunk, amely az abszcisszatengelyt a 0 és a 4 jelzésű pontjában metszi.
Az adott szorzat értéke akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, vagyis a (-3), a 0, az 1 és a 4 helyen, és akkor pozitív, amikor a két tényező azonos előjelű, vagyis a $]-3; 0[$ (ekkor mindkét tényező negatív) és az $]1; 4[$ intervallumon (ekkor mindkét tényező pozitív).
Tehát az adott egyenlőtlenség megoldáshalmaza:
$M = [-3; 0] \cup [1; 4]$.
Az egyenlőtlenség tényezőit egy korábbi Ráadás leckében látott táblázattal is vizsgálhatjuk. Készítsd el a táblázatot a szorzatfüggvény két tényezőjére vonatkozóan, mindkét függvény zérushelyeit felvéve a táblázatba!

5. Oldjuk meg az **R** alaphalmazon az $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{4x - x^2} \geq 0$ egyenlőtlenséget!

Megoldás:
Egy tört akkor 0, ha a számlálója 0, de a nevezője nem 0, és akkor pozitív, amikor a számláló és a nevező azonos előjelű. Ezért ennek az egyenlőtlenségnek a megoldáshalmaza **a nevező zérushelyeinek kivételével** megegyezik az előző egyenlőtlenség megoldáshalmazával:
$M = [-3; 0[\cup [1; 4[$.

FELADAT

1 Oldd meg (Viète-formulák segítségével) az egyenletrendszert:
$$\left.\begin{aligned} x - y &= 26 \\ xy &= 507 \end{aligned}\right\}!$$

2 Oldd meg (Viète-formulák segítségével) az egyenletrendszert:
$$\left.\begin{aligned} x^2y + xy^2 &= 56 \\ xy + x + y &= 15 \end{aligned}\right\}!$$

3 Oldd meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget!
$$\frac{2(1 + 2x)}{x^2 - x - 6} \leq -1$$
Útmutató: rendezd az egyenlőtlenséget úgy, hogy a jobb oldalon 0 álljon!

4 Igazold, hogy ha az a, b és a c olyan valós számok, amelyek esetében $(a + b + c)(a - b + c) > (a - c)^2$, akkor az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek nincs gyöke a valós számok halmazában!
Útmutató: Hozd egyszerűbb alakra az adott egyenlőtlenséget a mérlegelv felhasználásával, majd vond le a következtetéseket! Ne feledkezz meg az $a = 0$ eset vizsgálatáról sem!

HÁZI FELADAT

1 Oldd meg (Viète-formulák segítségével) az egyenletrendszert:
$$\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 36 \\ xy &= 80 \end{aligned}\right\}!$$

2 Melyik hegyesszögre teljesül, hogy
$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0{,}48$?

3 Oldd meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget!
$$\frac{x^2 - 8x + 12}{5x - x^2} \leq 0$$

86 GYAKORLÁS

FELADAT

1 Hogy hívják a Horváth gyerekek édesapját, ha a névnapjáról a következőket tudjuk: a hónap és a nap sorszámának összege 15, szorzata pedig 54?

2 A Tóth család színházba készül, Hajni megy jegyet venni. Az édesapa a legjobb hely árát vette figyelembe, kiszámolt Hajninak 21 ezer forintot. Közben kiderült, hogy nagypapa és nagymama nem tudnak jönni. A legdrágább jegyek már elfogytak, ezért Hajni 500 forinttal olcsóbbakat vásárolt. Így 12 800 forintot fizetett. Hányan mentek a színházba?

3 Tamásnak új motorja van. Egy 75 km-es utat tervezett be a próbaútra. Dezső negyed órával később indult utána, és éppen a célnál érte utol. Dezső átlagsebessége 10 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val nagyobb volt, mint Tamásé. Mekkora sebességgel haladtak?

4 Oldd meg az egyenletrendszereket!

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{y} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 5y - 9 = 0 \\ 3x + (x + y)^2 + 9 = (x + 3)^2 - (y - 3)^2 \end{cases}$

HÁZI FELADAT

1 Egy fagerenda 90 kg, egy nála 2 méterrel hosszabb vasgerenda pedig 160 kg. A vasgerenda métere 5 kg-mal nehezebb 1 méternyi fagerendánál. Milyen hosszúak ezek a gerendák?

2 Mikor van Bence születésnapja? A hónap és a nap sorszámának számtani közepe 10, szorzata pedig 91.

3 Két szám összege ugyanannyi, mint a két szám szorzata és mint a két szám hányadosa. Melyik ez a két szám?

4 Oldd meg az egyenletrendszereket!

a) $\begin{cases} x - y = 9 \\ \dfrac{5}{x} - \dfrac{4}{y} = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{(8x + y)^2}{4} + \dfrac{(9 - 3x)^2}{3} = 5y - 16 \\ 10x + y - 10 = 0 \end{cases}$

Négyzetgyökös egyenlőtlenségek

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

a) $\sqrt{-x^2+x+6}<-5$ **c)** $\sqrt{-x^2+x+6}>x$

b) $\sqrt{-x^2+x+6}>-5$ **d)** $\sqrt{-x^2+x+6}<x$

Megoldás

Mindegyik esetben a $-x^2+x+6\geq 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza az értelmezési tartomány.

a) A négyzetgyök értéke nem lehet negatív, ezért (−5)-nél kisebb sem, tehát ennek az egyenlőtlenségnek nincs megoldása, megoldáshalmaza az üres halmaz.

b) Minden olyan szám megoldása az egyenlőtlenségnek, amelyet behelyettesítve a négyzetgyök alatti polinom helyettesítési értéke nemnegatívnak adódik. Ezért az egyenlőtlenség ekvivalens a $-x^2+x+6\geq 0$ egyenlőtlenséggel, vagyis a megoldáshalmaz éppen az egyenlet értelmezési tartománya.

A bal oldal szorzattá alakítható: $(3-x)(x+2)\geq 0$. Akár a tényezők előjelének vizsgálatával, akár az $x\mapsto -x^2+x+6$ másodfokú függvény ábrázolása alapján [zérushelyek a (−2) és a 3, a parabola lefelé nyitott] kapjuk: $-2\leq x\leq 3$.

Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: [−2; 3].

c) Elegendő az értelmezési tartományban keresni a megoldásokat. Ezt az alaphalmazt bontsuk két diszjunkt halmazra!

– Ha $x<0$, akkor a b) feladatban elmondottakat alkalmazva azt kapjuk, hogy a [−2; 3] intervallumnak minden negatív eleme megoldása az egyenlőtlenségnek: a választott alaphalmazban [−2; 0[a megoldáshalmaz.

– Ha $x\geq 0$, akkor a [0; 3] intervallumnak mindazok az elemei megoldásai az egyenlőtlenségnek, amelyek a négyzetre emeléssel kapott egyenlőtlenségnek is megoldásai (a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás ezen az alaphalmazon).

$-x^2+x+6>x^2$, $2x^2-x-6<0$.

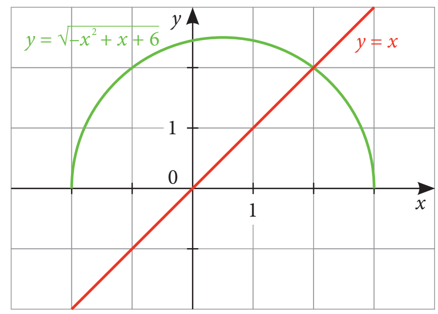
A $2x^2-x-6=0$ egyenlet gyökei (−1,5) és 2, tehát az $-x^2+x+6>x^2$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza a valós számok halmazán a]−1,5; 2[intervallum.

A választott alaphalmazon a [0; 2[intervallum a megoldáshalmaz.

Összefoglalva: A $\sqrt{-x^2+x+6}>x$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza a

[−2; 0[∪ [0; 2[= [−2; 2[intervallum.

A két függvény grafikonja egy félkör, illetve egy egyenes. A rajzról leolvasható, melyik grafikon melyik helyeken van a másik „fölött”.



d) Itt is elegendő az értelmezési tartományban keresni a megoldásokat. Az alaphalmazt bontsuk két diszjunkt halmazra!

– Ha $x<0$, akkor az egyenlőtlenségnek nincs megoldása, hisz a négyzetgyök értéke nem lehet negatív.

– Ha $x\geq 0$, akkor a [0; 3] intervallumnak mindazok az elemei megoldásai az egyenlőtlenségnek, amelyek a négyzetre emeléssel kapott egyenlőtlenségnek is megoldásai (a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás ezen az alaphalmazon).

$-x^2+x+6<x^2$, $2x^2-x-6>0$. Ennek megoldáshalmaza a valós számok halmazán az $\mathbf{R}\setminus[-1{,}5;\,2]$, tehát a [0; 3] intervallum 2-nél nagyobb elemei tartoznak ehhez a halmazhoz. A]2; 3] intervallum elemei adják az $x\geq 0$ halmazban a megoldásokat.

Összefoglalva: A $\sqrt{-x^2+x+6}<x$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza a]2; 3] intervallum.

2. Oldd meg az egyenlőtlenségeket!

a) $\sqrt{-x^2-4x+21}>3$

b) $\sqrt{-x^2-4x+21}<3$

c) $\sqrt{-x^2-4x+21}>x+3$

d) $\sqrt{-x^2-4x+21}\leq x+3$

87 ÉRETTSÉGI FELADATOK

FELADAT

A másodfokú függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek állandó szereplői a matematika érettségi vizsgáknak. Összegyűjtöttünk néhányat a témához tartozó feladatok közül. Ezeket önállóan, párban vagy csoportmunka keretében is feldolgozhatjátok. A feladatok néhol nem az eredeti szövegükkel szerepelnek.

1 Jelölje meg annak a kifejezésnek a betűjelét, amelyik az $ax^2 + dx + e = 0$ egyenlet diszkriminánsa, ha $a \neq 0$!

a) $d^2 - ae$ **b)** $d^2 - 4ae$ **c)** $\sqrt{d^2 - 4ae}$

(A 2006. februári középszintű érettségi 9. feladata.)

2 **a)** Ábrázolja a $[-2;\ 4]$ zárt intervallumon értelmezett, $x \mapsto (x - 1{,}5)^2 + 0{,}75$ hozzárendeléssel megadott függvényt!

b) Állapítsa meg a fenti függvény minimumának helyét és értékét!

c) Oldja meg a valós számok halmazán a $\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 1 - 2x$ egyenletet!

(A 2006. októberi középszintű érettségi 13. feladata nyomán.)

3 Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\frac{x^2 - 10x - 24}{x^2 - x - 6} = 10$$

(A 2007. májusi emelt szintű érettségi 1. feladata nyomán.)

4 **a)** Oldja meg a $7 + x < -2 \cdot (x - 2)$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

b) Oldja meg az $x^2 + x - 6 \leq 0$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

c) Legyen az A halmaz az a) alatti egyenlőtlenség megoldáshalmaza, B pedig a b) alatti egyenlőtlenség megoldáshalmaza. Adja meg az $A \cup B$, $A \cap B$ és a $B \setminus A$ halmazokat!

(A 2007. májusi középszintű érettségi 13. feladata nyomán.)

5 Oldja meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} x \cdot y &= 600 \\ (x - 10)(y + 5) &= 600 \end{aligned}\right\}$$

(A 2008. októberi középszintű érettségi 13. feladata.)

HÁZI FELADAT

1 Adja meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a $\sqrt{-x}$ kifejezés értelmezhető!
(A 2009. májusi középszintű érettségi 7. feladata.)

2 A valós számok halmazán értelmezett f másodfokú függvény grafikonját úgy kaptuk, hogy a $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ függvény grafikonját eltoltuk az x tengellyel párhuzamosan pozitív irányban 2 egységgel, majd az így kapott grafikont eltoltuk az y tengellyel párhuzamosan negatív irányban 4,5 egységgel.

a) Adja meg az f függvény hozzárendelési utasítását képlettel!
b) Határozza meg f zérushelyeit!
c) Rajzolja meg az f grafikonját a $[-2; 6]$ intervallumon!
d) Oldja meg az egész számok halmazán a következő egyenlőtlenséget!
$$\frac{1}{2}x^2 \le 2x + \frac{5}{2}$$
(A 2009. májusi középszintű érettségi 17. feladata.)

3 Adott a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto 2x^2 - 4x - 6$ függvény.

a) Számítsa ki a függvény zérushelyeit, és számítással határozza meg a függvény minimumának helyét és értékét!
b) Ábrázolja a függvényt a $[-2; 4]$ intervallumon!
(A 2006. februári középszintű érettségi 13. feladata.)

4 Az f és g függvényeket a valós számok halmazán értelmezzük a következő képletek szerint:
$f(x) = (x+1)^2 - 2$, $g(x) = -x - 1$.

a) Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben az f függvényt! (Az ábrán szerepeljen a grafikonnak legalább a $-3{,}5 \le x \le 1$ intervallumhoz tartozó része!)
b) Ábrázolja az előző koordináta-rendszerben a g függvényt!
c) Oldja meg az $(x+1)^2 - 2 \le -x - 1$ egyenlőtlenséget!
(A 2006. februári középszintű érettségi 13. feladata.)

EMELT SZINT

1 Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!
$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-3} = 2$$
(A 2008. májusi emelt szintű érettségi 2. feladata.)

2 **a)** Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben az $f: [0; 7] \mapsto \mathbf{R}$, $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$ függvényt!
b) Adja meg f értékkészletét!
c) A p valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az $|x^2 - 6x + 5| = p$ egyenletnek a $[0; 7]$ intervallumon?
(A 2005. októberi emelt szintű érettségi 4. feladata.)

3 Legyen f és g is a valós számok halmazán értelmezett függvény:
$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x \le -1 \\ 2x+1, & \text{ha } -1 < x < 0, \text{ és} \\ 1, & \text{ha } x \ge 0 \end{cases}$$
$g(x) = x^2 - 2$.

Ábrázolja ugyanabban a koordináta-rendszerben mindkét függvényt! Oldja meg az $f(x) = g(x)$ egyenletet!
(A 2009. májusi emelt szintű érettségi 4.a) feladata.)

4 Oldja meg a valós számok halmazán az $x^2 - |x| = 6$ egyenletet!
(A 2008. októberi emelt szintű érettségi 1.b) feladata.)

88 CSOPORTVERSENY

CSOPORTMUNKA

Alkossatok négyfős csoportokat!

1. *X* ügynöknek 30 perce van arra, hogy egy kód segítségével hatástalanítson egy ártalmas szerkezetet. Ha első kísérlete nem sikerül, akkor az ártalmas gép azonnal megkezdi működését. Ez pedig beláthatatlan következményekkel járna…
A kód „szerzője" esélyt adott a súlyos és drámai események elkerülésére, ugyanis pontos leírást helyezett el a szerkezeten arra vonatkozóan, hogy mi a teendő. A hatástalanítás sikeréhez szükség van *X* ügynök matematikatudására is. Segítsetek *X* ügynöknek elhárítani a veszélyt!
Oldjátok meg az 1–5. feladatokat, és hozzátok nyilvánosságra a hatástalanítás módját! Az a csoport, amelyik először írja fel a jó eljárást, jutalomban részesül. Amikor minden csoport nyilvánosságra hozta az eredményét, akkor a mentőakció véget ér. Amíg van olyan csoport, amelyik nem végzett a munkájával, addig a már végzettek egyszer javíthatnak javaslatukon.

1. feladat Melyik szám a $0 \le -x^2 + 6x - 5$ egyenlőtlenség megoldáshalmazának a legnagyobb eleme?	*Jelöld ezt a számot **A**-val!*
2. feladat Hány megoldása van az $\left.\begin{array}{r} x + y = 4 \\ x^2 - y^2 = 12 \end{array}\right\}$ egyenletrendszernek?	*Az eredményt jelöld a **B** betűvel!*
3. feladat A következő egyenletek közül hány ekvivalens a $\frac{2x^2 - 18}{x + 3} = 4$ egyenlettel? $(2x+1)(3 - x) + 22 = 0$; $x^2 - 2x = 15$; $x(x + 1) - 22 = (3 - x)(1 - x)$; $(x + 3)(x - 5) = 1$; $(x + 4)^2 = 81$; $\sqrt{x^2 + 11} = 6$; $3\sqrt{x + 4} = 9$.	*A kapott számot jelöld **C**-vel!*
4. feladat Állapítsd meg, hogy a következő egyenletek közül hány olyan van, amely **nem** ekvivalens a $\frac{2x^2 - 18}{x + 3} = 4$ egyenlettel, de a következményegyenlete ennek! $(2x + 1)(3 - x) + 22 = 0$; $x^2 - 2x = 15$; $x(x + 1) - 22 = (3 - x)(1 - x)$; $(x + 3)(x - 5) = 1$; $(x + 4)^2 = 81$; $\sqrt{x^2 + 11} = 6$; $3\sqrt{x + 4} = 9$.	*A kapott számot jelöld **D**-vel!*
5. feladat Oldd meg a $\sqrt{Ax^2 + D} = Bx + C$ egyenletet!	*Az egyenlet két gyökének a négyzetösszegét jelöld **E**-vel!*
*Billentyűzd be a hatástalanító készülékbe az **ABCDE** ötjegyű számot, és utána nyomd meg a piros gombot! Ha a megfelelő számot írtad be, akkor az ártalmas kódot kivégezted, De Ha Nem …*	

2. Az első 3 helyezett csapat mutassa be, milyen egyszerű módszereket alkalmazott a hatástalanítás érdekében!

HÁZI FELADAT

1 Oldd meg az egyenlőtlenségeket!

a) $\frac{3}{x^2+4} < 0$

b) $\frac{3}{x^2-4} < 0$

c) $\frac{x}{x^2+4} > 0$

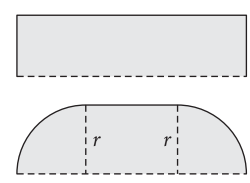
d) $\frac{x}{x^2-4} > 0$

2 Egy gyümölcsárus egyik nap 7500 Ft-ért adott el almát. Másnap 10 forinttal olcsóbban adta az alma kilóját. Így 25 kilóval többet adott el, mint előző nap, az almaeladásból származó bevétele pedig 9000 forint lett. Hány kiló almát adott el az árus az első napon, és mennyi volt ekkor az alma egységára?

3 Szigor Lajos havi bérét 167 400 forintra emelték. Sima Bianka bére 20 ezer forinttal több volt a béremelés előtt, mint Szigor úré, ám Bianka 2%-kal kevesebb béremelésben részesült, így 185 500 forint lett a fizetése. Mennyi volt Szigor úr havi bére az emelés előtt, és hány százalékos volt a béremelése?

RÁADÁS

Egy cégnél 24 cm széles, téglalap alakú vékony bádoglemezből ereszcsatornát készítenek a lemez széleinek felhajlításával. Mekkora a legnagyobb áteresztőképességű csatorna keresztmetszetének területe, ha

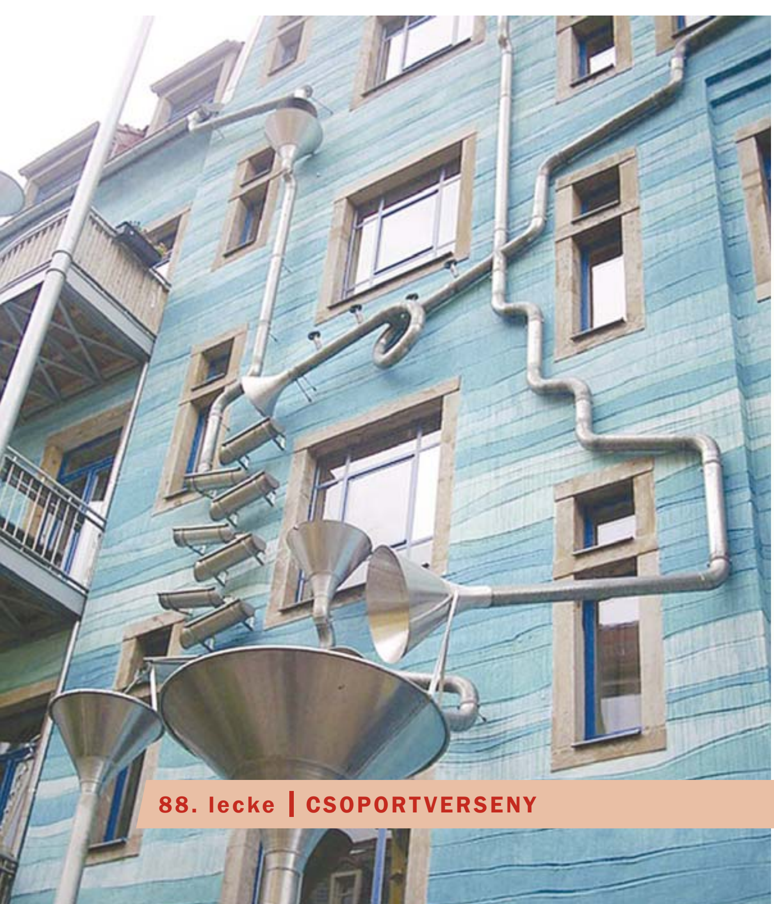


a) téglalap keresztmetszettel készítik el;

b) a lemez két oldalán szimmetrikusan egy-egy negyedkörívet hajlítanak fel a csatorna-keresztmetszet kialakításához?

c) Ha eldugul a csatorna lefolyója, akkor hány liter vizet tárolhat a b) feladat szerint készített ereszcsatorna 25 méter hosszúságú szakasza?

d) A háztetőkön legtöbbször látható „közönséges” ereszcsatornát milyen keresztmetszettel készítik? Miért?



89 GYAKORLÁS, TUDÁSPRÓBA

FELADAT

1 Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket!

a) $3x - x^2 < 0$

b) $x^2 - 4{,}5x - 9 < 0$

2 Egy téglalap átlói 20 cm-esek, területe 192 cm^2. Mekkora a téglalap kerülete?

3 Oldd meg az egyenlőtlenségeket!

a) $|x - 7| - 3 \leq 0$

b) $|2 - 2x| < 4$

4 Oldd meg a valós számok halmazán az egyenletet!
$9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$

5 Iskolai kirándulás tervezésekor kiszámították, hogy összesen 98 000 forintot kell az osztály tanulóinak befizetniük. Szeptemberben kiderült, hogy három tanuló nem tud elmenni, így 92 500 forintra változott a befizetendő összeg. Ennek ellenére az eredetileg tervezettnél 200 forinttal többet kellett fejenként befizetniük, mert az árak is emelkedtek. Hány tanuló ment végül kirándulni, és hány forintot kellett fejenként befizetniük?

6 Egy vegyipari cég havonta x kg terméket állít elő. Egy kg terméket $(32 - 0{,}02x)$ euróért tud eladni. Az előállítás költsége euróban $(0{,}1x^2 - 45x + 12\,000)$. Hány kg termék előállítása esetén lesz a cégnek nyeresége ebből a termékből, ha feltételezzük, hogy amit előállít, azt el is tudja adni?

7 Egy egyenlőszárú háromszög területe 156 mm^2. Az alap és a hozzá tartozó magasság összege 58 mm.

a) Mekkora a háromszög alapja?

b) Milyen hosszúak a háromszög szárai?

8 Egy kétjegyű szám nyolcszor annyi, mint számjegyeinek összege. A számjegyeinek szorzata 5-tel több, mint a számjegyek összege.
Melyik ez a szám?

9 Egy derékszögű útkereszteződésből indul két kerékpáros. Az első észak felé, és másodpercenként 4,5 m-t tesz meg. A második 5 másodperccel később indul kelet felé, és másodpercenként 5,5 m-t tesz meg.
Hány másodpercig lesznek – légvonalban – 500 m-nél közelebb egymáshoz?

10 Patakiék a kandallójuk mellett 28 db farönköt szeretnének egy gúlában elhelyezni az ábrán látható módon. Hány farönköt tegyenek az alsó sorba, hogy mind a 28-at el tudják így helyezni?
(OKM-feladat, 2012, 99/71. feladat)

TUDÁSPRÓBA I.

1 Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket!

a) $2x - 2 > x^2$ **b)** $(2x + 15)^2 + x - 3 \leq 0$

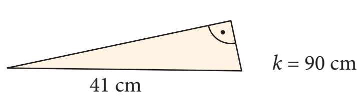
2 Két szám szorzata $\frac{7}{6}$. Reciprokaik összege $\frac{53}{28}$. Melyik ez a két szám?

3 Egy cég az egyik termékéből minden hónapban x darabot állít elő. Az előállítás költsége a $k(x) = x^2 + 1176$ összefüggéssel számolható, euróban. Egy terméket 70 euróért tudnak eladni.

Hány termék előállítása esetén lesz nyereséges ez a termék a cégnek?

4 A Tóth család 6820 Ft-ért vásárolt palántákat. Ha a 30 Ft-tal drágább palántákból vásárolnak, és 2-vel kevesebbet vettek volna, akkor 6800 Ft-ot fizettek volna. Milyen áron vették a palántákat?

5 Egy derékszögű háromszög kerülete 90 cm, átfogója 41 cm. Mekkorák a háromszög befogói?



TUDÁSPRÓBA II.

1 Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket!

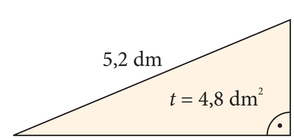
a) $3x^2 - 2x < 1$ **b)** $(x - 3)^2 > 2x - 7$

2 Egy üzemben többféle terméket gyártanak. Az egyik termékükből x darab előállításának költsége $k(x) = x^2 + 3120$ (euró). Ezt a terméket 113 euróért árulják. Hány darab termék gyártása esetén lesz nyereséges ez a termékük? (Feltesszük, hogy el is tudják adni, amit előállítanak.)

3 Kálmán és barátai a Bodrogon vízitúráznak. 3,5 km-re távolodnak el a táborhelytől, majd visszatérnek. A folyón lefelé 3,5-szer akkora a sebességük, mint fölfelé. Mekkora lenne a fiúk átlagsebessége állóvízben, és mekkora a Bodrog sebessége , ha tudjuk, hogy az oda és visszaútjuk összesen 100 percig tartott?

4 Egy téglalap területe 14,7 cm^2. Ha az egyik oldalát 2 cm-rel megnöveljük, a másikat 1 cm-rel csökkentjük, akkor a területe 2,9 cm^2-tel nagyobb lesz. Mekkorák a téglalap oldalai?

5 Egy derékszögű háromszög átfogója 5,2 dm, területe 4,8 dm^2. Mekkorák a háromszög befogói?



RÁADÁS

Elsőfokú és másodfokú egyenletek megoldására van általános módszerünk. Természetesen vetődik fel a kérdés, hogy a harmadfokú, negyedfokú, illetve magasabb fokú egyenletek megoldására is létezik-e általános eljárás, van-e „megoldóképlet”.

Bizonyos harmadfokú egyenleteket nem nehéz algebrai úton megoldani. Például az $x^3 - 1 = 0$ (átrendezve: $x^3 = 1$) egyetlen valós megoldása az $x = 1$, vagy az $x^3 - x = 0$ egyenlet valós megoldásai a 0, az 1 és a -1. Ezt az egyenlet $x(x - 1)(x + 1) = 0$ alakjából azonnal láthatjuk.

Az általános harmadfokú egyenlet algebrai megoldását 1545-ben adta meg Girolamo Cardano itáliai matematikus az *Ars Magna* című munkájában, Niccolò Tartaglia megoldása alapján. Ugyanebben a műben jelent meg Cardano tanítványának, Lodovico Ferrarinak az általános negyedfokú egyenlet megoldására vonatkozó eljárása is.

Cardano módszerének egyik érdekessége a *casus irreducibilis*-nek nevezett eset [ejtsd *kázusz irreducibilisz*, azaz *(egyszerűbbre) vissza nem vezethető eset*]: ha a harmadfokú egyenletnek három különböző valós szám a megoldása, akkor az egyenlet „megoldóképletében” negatív számok négyzetgyökeivel kell dolgoznunk. Ez a probléma vezetett el később a számfogalom további bővítéséhez, az úgynevezett komplex számok megalkotásához.

A másodfokú egyenletekhez könnyen találtunk olyan megoldóképletet, amely az együtthatókból kiindulva a négy alapművelet és gyökvonás segítségével az egyenlet összes gyökét megadja. Amint láttuk, van ilyen módszer a harmad- és negyedfokú egyenletekre is. Azonban egy norvég és egy olasz tudós csaknem 200 évvel ezelőtt bebizonyította, hogy ötöd- és annál magasabb fokú egyenletekre nincs általános képlet vagy megoldási módszer. Ez az ún. Abel–Ruffini tétel.

TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

1 Oldd meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget!

a) $2x^2 - 11x - 6 < 0$

b) $-10x^2 + 21x - 9 \leq 0$

2 **a)** $|2x - 6| \geq 4$

b) $\left|\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right| < 5$

3 Egy függőlegesen felfelé dobott test x másodperc múlva $h(x) = 32x - 5x^2$ méter magasságban van. Melyik időtartamban van magasabban, mint 40 méter?

4 Egy cég a következő félévben akkor oszt prémiumot a dolgozók között, ha a nyereség több lesz, mint 2 ezer euró. A cég számításai szerint x db termék forgalmazása esetén a nyereség $f(x) = 57x - 0{,}3x^2$ euró, és $x \leq 95$. Hány terméket kell ahhoz forgalmazni, hogy prémiumot kapjanak a dolgozók?

5 A Coulomb-törvény szerint két, egymástól r távolságra lévő pozitív töltés között a következő nagyságú taszító erő lép fel: $F = k\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$; ahol Q_1 és Q_2 a töltések nagysága, és k pedig egy állandó, $k = 9 \cdot 10^9\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}$. Mekkora távolságra vannak egymástól a Q_1 és Q_2 töltések ($Q_1 = 3{,}84 \cdot 10^{-6}$ C és $Q_2 = 2{,}16 \cdot 10^{-2}$ C), ha a köztük lévő taszító erő nagyobb, mint 12 N?

6 Oldd meg a valós számok halmazán az egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} xy &= 4{,}8 \\ 2x + 0{,}5y &= 6{,}8 \end{aligned}\right\}$$

7 Oldd meg a valós számok halmazán az egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} (x+1)^2 + (y+2)^2 &= 65 \\ x + 2y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

8 Oldd meg a valós számok halmazán az egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 4 \\ y^2 - x + 5y &= 51 \end{aligned}\right\}$$

9 Oldd meg a valós számok halmazán az egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} x - y - 2xy &= 4{,}5 \\ \frac{x}{y} &= -2 \end{aligned}\right\}$$

10 Oldd meg a valós számok halmazán az egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} x - y &= \frac{6}{5} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= -\frac{10}{9} \end{aligned}\right\}$$

11 Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

a) $45x^4 - 11x^2 - 4 = 0$

b) $8x^6 + 7x^3 - 1 = 0$

12 Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$(6x^2 - 9x)\cdot(6x^2 + 9x) = 2x^2 - 35$

13 Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$60\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 304\left(x + \frac{1}{x}\right) + 377 = 0$

14 Melyik hegyesszögre teljesül a következő egyenlet?

a) $\sin^2\alpha + 1{,}3\sin\alpha - 1{,}4 = 0$

b) $3\cos^2\alpha + 5{,}6\cos\alpha - 6{,}4 = 0$

15 Két pozitív szám számtani közepe 5,65, mértani közepe 5,6. Melyik ez a két szám?

16 Két szám szorzata 3,75; a négyzetük összege 8,5. Melyik ez a két szám?

17 Két negatív szám szorzatának a négyzete 1089, összegének a négyzete 132,25. Mennyi a különbségük négyzete?

18 Egy téglalap alakú kert egyik oldala 12 méterrel hosszabb, mint a másik. A területe 728 m². Milyen hosszúak a kert oldalai?

19 Egy téglalap két oldalának különbsége 14 cm. Az átlói 61,6 cm hosszúak.

a) Mekkorák az oldalai?

b) Mekkora szöget zárnak be egymással a téglalap átlói?

20 Egy kiránduláshoz a busz bérlése 96 000 forintba kerül. Az utolsó napon kiderül, hogy még egy jelentkező csatlakozik a csoporthoz, ezért a szervezők örömmel küldik az üzenetet, hogy a busz egy főre számított költsége 400 Ft-tal kevesebb lesz a tervezettnél. Hányan mennek kirándulni?

21 Egy rendezvényen a pályázati keretből minden önkéntes segítőnek vesznek a szervezők egy doboz bonbont. 19 320 forintért vásárolnak, mindenkinek ugyanazt a bonbont adják. Ha kettővel több önkéntes lett volna, akkor 80 Ft-tal olcsóbb bonbont kapott volna mindenki, s ugyanannyit költöttek volna. Hány önkéntes segítő volt a rendezvényen?

22 Egy munkagép két hátsó kereke 15 cm-rel nagyobb sugarú, mint az elsők. 230 méteres úton a hátsó kerekek 36-tal fordulnak kevesebbet, mint az elsők. Mekkora a kerekek átmérője?

23 Egy 13 cm × 20 cm-es fénykép mögé akkora téglalap alakú fehér lapot ragasztunk, hogy a képet körülvevő fehér sáv területe megegyezzen a kép területével. A sáv szélessége minden oldalon ugyanannyi. Milyen széles a sáv?

24 Egy váza alakja négyzet alapú egyenes hasáb. 432 cm^3 víz fér bele. A négy függőleges oldallapjának területe összesen 288 cm^2. Milyen magas a váza?

25 Egy 100 és 200 közötti 3-jegyű szám számjegyeinek szorzata 18. Ha minden számjegye helyett a kettővel nagyobb számjegyet írjuk, akkor a számjegyek szorzata 120. Melyik ez a szám?

26 Egy derékszögű kereszteződésből egyszerre indul két autó, az egyik dél felé, a másik nyugat felé. két perc múlva 2800 méter távol lesznek egymástól. A dél felé tartó autó 2,5 méterrel több utat tesz meg egy másodperc alatt, mint a másik. Mekkora az autók sebessége?

27 Egy téglalap alakú kert körülkerítéséhez 100 m kerítést használtak. A kert két legtávolabbi pontja 36,7 m távol van egymástól. Mekkora a kert területe?

28 Egy téglalap kerülete 128 mm. A téglalap minden oldala, mint átmérő fölé kifelé egy-egy félkört rajzolok. A félkörök területének összege 16,34 cm^2. Mekkorák a téglalap oldalai?

29 Egy biciklitúrát tervez Pisti és Karcsi. – A szokásos átlagsebességünkkel 86 km-t tehetnénk meg. – mondja Pisti. De Karcsi hozzáteszi:

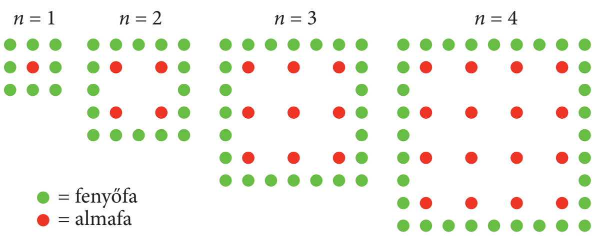
– Ha 0,4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-rel nagyobb átlagsebességgel haladnánk, és fél órával többet tekernénk, akkor 10,8 km-rel hosszabb utat is teljesíthetnénk.
Mekkora a „szokásos” átlagsebességük?

30 Két ellenállást sorosan kapcsolva az eredő ellenállás 6 Ω. Ugyanezeket az ellenállásokat párhuzamosan kapcsolva az eredő ellenállás 1,365 Ω. Mekkorák az ellenállások?
(R_1 és R_2 ellenállásokat sorosan kapcsolva az eredő ellenállás $R_1 + R_2$. Párhuzamos kapcsolás esetén az eredő ellenállás reciproka $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.)

31 Kétfajta gyümölcsöt vettünk az osztálykirándulásra; körtéből 5 kg-mal többet, mint szilvából. A körte 3200 forintba került, a szilváért 1320 forintot fizettünk. 1 kg szilva 80 forinttal olcsóbb, mint 1 kg körte. Hány kg körtét és hány kg szilvát vásároltunk?

MATEMATIKAI FEJTÖRŐK

1 Egy gazda a kertjében négyzetrács alakzatban almafákat ültet, a kertet pedig fenyőfákkal veszi körül, hogy a gyümölcsöst megvédje a széltől.



Az ábrákon ez a faültetés látható: leolvasható az almafák és a fenyőfák elhelyezkedése különböző számú fasor esetén. (n = az almafasorok száma)
Egészítsd ki a táblázatot a füzetedben!

a)

n	Almafák száma	Fenyőfák száma
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

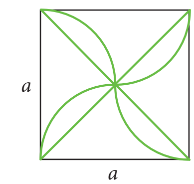
b) Mennyivel nő a fenyők száma, ha az egy sorban lévő almafák számát 1-gyel növeljük?

c) Az alábbi két képlettel számolható ki kertenként az almafák és a fenyőfák száma:
almafák száma $= n^2$,
fenyőfák száma $= 8n$, ahol n az almafasorok számát jelöli.
Magyarázd meg, miért!

d) Egy bizonyos n érték mellett az almafák száma megegyezik a fenyőfák számával. Melyik ez az n érték? Írd le, hogyan számoltad ki!

e) Tegyük fel, hogy a gazda sokkal nagyobb gyümölcsöst szeretne, ezért még több fát ültet. A gyümölcsös bővítése során melyik fog gyorsabban nőni: az almafák vagy a fenyőfák száma? Válaszodat indokold!

2 Az ábrán egy négyzet alakú üveglap mintája látható, amelyet fémszál segítségével készítettek. A fémszálakat zöld vonal jelöli. Melyik képlettel számítható ki annak a fémszálnak a hosszúsága, amelyet az a oldalhosszúságú üveglap mintájához használtak? (A mintában negyedkörívek láthatók.)



a) $a \cdot (2\sqrt{2} + \pi)$ **c)** $2a \cdot (\sqrt{2} + \pi)$
b) $a \cdot (\sqrt{2} + \pi)$ **d)** $a \cdot (\sqrt{2} + 2\pi)$

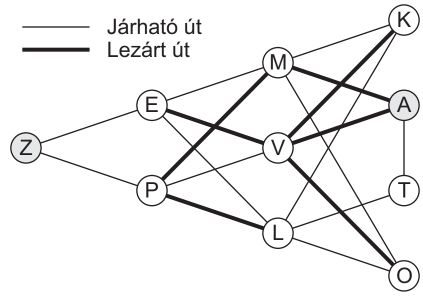
3 Géza kiadó lakást keres internetes apróhirdetésekben. Keresési szempontnak beállíthatja a szobák minimális és maximális számát, a lakás állapotát és a fűtés típusát. Ha nem ad meg semmilyen szempontot, összesen 243 hirdetés jelenik meg. Ha beírja, hogy legalább 2 szobás és felújított lakást szeretne, már csak 54 hirdetés jelenik meg. Ha azonban csak azt adja meg feltételnek, hogy a lakás felújított legyen, összesen 103.
Hány olyan felújított lakást hirdetnek, amelynek kettőnél kevesebb szobája van?

a) 28 **c)** 59
b) 49 **d)** 82

4 A kinyomtatott fényképek minőségének egyik jellemzője a felbontás, amit dpi-ben (dpi = dot per inch) adnak meg. A dpi értéke megmutatja, hogy inchenként hány pontot készít a nyomtató a kép kinyomtatása során. Kálmán nyomtatójának felbontása 400 dpi. Kálmán utánanézett, hogy 1 inch körülbelül 2,54 cm-nek felel meg.
Hány képpont található a Kálmán nyomtatójával nyomtatott fénykép 1 cm hosszúságú szakaszán?

a) 62 **c)** 1024
b) 157 **d)** 400

5 A következő ábra egy egyszerűsített térkép, amelyen a betűk falvakat, a vonalak utakat jelölnek. A vastag vonallal jelölt utak felújítás miatt le vannak zárva.



a) Döntsd el, melyik igaz, illetve melyik hamis a következő állítások közül!

A: A térkép szerint **V**-n keresztül semmiképp nem lehet eljutni **Z**-ből **A**-ba úgy, hogy közben egy települést sem érintünk kétszer.

B: Ahhoz, hogy valaki **Z**-ből **T**-be jusson, mindenképp útba kell ejtenie **L** települést.

C: **Z**-ből **A**-ba lehet jutni a következő útvonalon is: **Z**-**P**-**M**-**K**-**L**-**T**-**A**.

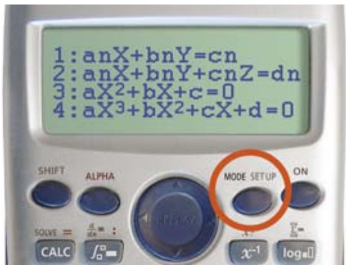
b) Számold össze, hányféle út vezet **Z**-ből **A**-ba, ha közben egy települést sem érinthetünk kétszer!

(OKM-feladat, 2013, 98/70)

6 TOTÓ (A füzetedben dolgozz!)

		1	2	x	Tipp
1.	A magyar rendszámok xxx-xxx típusúak. Az első három helyre 26 betű közül, a második három helyre 10 számjegy közül lehet választani. Hány olyan rendszámtábla készíthető, amelyben a három betű megegyezik, és a három számjegy is megegyezik?	36	260	$26^3 \cdot 10^3$	
2.	Bence zsebpénzét két egymás utáni héten ugyanakkora százalékkal emelte a családi tanács. Így aztán a zsebpénz a kezdeti 1200 forintról 1400 forintra nőtt. Hány százalékos volt a heti emelés?	$\approx$ 10	$\approx$ 16	$\approx$ 8	
3.	Egy kör alakú park tervezője az eredeti helyett 12%-kal nagyobb sugarú park tervét készítette el. Hány százalékkal nagyobb ennek a területe, mint az eredeti tervben szereplőé?	$\approx$ 25	$\approx$ 12	$\approx$ 125	
4.	Egy derékszögű háromszögnek az átfogójához tartozó magassága az átfogót egy 2 cm-es és egy 8 cm-es szakaszra osztja. Mekkora a háromszög területe?	20 cm^2	16 cm^2	25 cm^2	
5.	Egy 3 m magas oszlopot huzalokkal rögzítenek függőleges állásban. A huzaloknak a vízszintes talajjal bezárt szöge 50° és 70° között van. Mekkora lehet legfeljebb a leghosszabb huzal?	$\approx$ 3,9 m	$\approx$ 3,2 m	$\approx$ 3 m	
6.	Hány pontosan négyjegyű pozitív egész szám van a tízes számrendszerben?	10^4	$9 \cdot 10^3$	$10^5 - 1$	
7.	Az $x^2 + 5x - 6 \le 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza (**R**-en):	$]1; 6[$	$[-1; 6]$	$[-6; 1]$	
8.	Egy négyzet oldalai 2 cm-rel hosszabbak, mint a másik négyzet oldalai. A két négyzet területének összege 394 cm^2. Mekkora a két négyzet kerületének összege?	100 cm	98,5 cm	112 cm	
9.	Egy négyzet két különböző oldalvektora **a** és **b**. Melyik nem lehet átlóvektora a négyzetnek?	**a** − **b**	2**a** − **b**	**b** + **a**	
10.	Ha egy hegyesszög koszinusza $\frac{1}{2}$, akkor mennyi a szinusza?	2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,5	
11.	Melyik állítás igaz? a) Ha két háromszög szögei egyenlők, akkor a két háromszög egybevágó. b) Ha két háromszög két oldalban és egy szögben megegyezik, akkor a két háromszög egybevágó. c) Ha két háromszög oldalai páronként párhuzamosak, akkor a két háromszög hasonló.	a)	b)	c)	
12.	Az alábbiak közül melyik függvénynek minimumhelye a 2? a) $x \mapsto -(x-2)^2 + 2$ b) $x \mapsto \lvert x-2 \rvert - 1$ c) $x \mapsto \sqrt{x+2} \quad (x \ge -2)$	a)	b)	c)	
13.	Összeszoroztuk egy nevezetes hegyesszög tangensét és kotangensét. Melyik számot kaphattuk eredményül?	1	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
13 + 1.	Melyik egyenlet diszkriminánsa egyenlő $(13+1)^2$-nel? a) $x^2 + 12x + 13 = 0$ b) $13x^2 + 12x - 1 = 0$ c) $x^2 + 13x - 12 = 0$	a)	b)	c)	

EGYENLETEK MEGOLDÁSÁNAK ELLENŐRZÉSE SZÁMOLÓGÉPPEL



Az alábbiakban bemutatunk néhány módszert, ahogy néhány modernebb – de az érettségin is engedélyezett – számológép segítségével ellenőrizni tudod az algebrai feladatok megoldását. Vigyázz! Az egyenletmegoldó funkciók használata nem helyettesíti az egyenlet megoldásának lépéseit! Ha csupán a végeredményét írod le egy egyenletnek vagy egyenletrendszernek, legfeljebb a végeredményért járó pontot kaphatod meg, a megoldási lépésekért járó pontokat nem.

Vannak számológépek (általában a magasabb árkategóriákban), amelyekkel könnyedén ki tudod számítani kétismeretlenes, elsőfokú egyenletrendszerek megoldását. Ezt a funkciót többnyire a MODE gomb megnyomásával érheted el. Válaszd ki ezen belül az EQN (equation = egyenlet) opciót, majd ezen belül az elsőfokú egyenletrendszer (angolul *simultaneous set of two/three linear equations*) opciót. Több számológépen ezt is láthatod: $a_nx + b_ny = c_n$ a kétismeretlenes, ezt pedig: $a_nx + b_ny + c_nz = d_n$ a háromismeretlenes egyenletrendszer megoldásához.

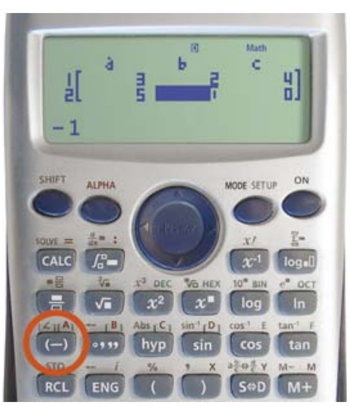
A számológépnek a kétismeretlenes egyenletrendszert $a_nx + b_ny = c_n$ formában kell megadni. a_1 és a_2 a két egyenletben az x ismeretlen együtthatói, b_1 és b_2 az y ismeretlen együtthatói, c_1 és c_2 pedig konstansok (számok). Tehát a két egyenletet úgy kell rendeznünk, hogy az ismeretlenek összevonva az egyik oldalon szerepeljenek, a másik oldalon pedig egy szám maradjon. Például:

$3x + 2y = 4$

$5x - y = 11$

Itt tehát $a_1 = 3$; $a_2 = 5$; $b_1 = 2$; $b_2 = -1$; $c_1 = 4$ és $c_2 = 11$.

Az együtthatókat egy táblázatban adhatjuk meg, az [=] gombbal beírva őket az egyes mezőkbe.



Figyelj! A negatív együtthatókat a számológép (–) vagy (+/–) *gombjának megnyomásával tudod megadni, nem pedig a kivonás* – *gombbal!*

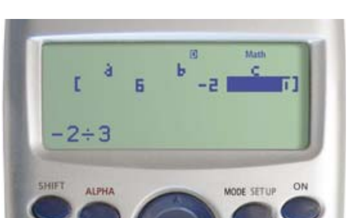
A mezők között a nyílgombokkal is mozoghatunk. Az utolsó együttható megadása után az = gomb megnyomásával a számológép kiszámola az x és y ismeretlenek értékeit. Az ismeretlenek között a fel/le nyílgombokkal vagy az = gomb megnyomásával is válthatsz.

Hasonlóan működik a háromismeretlenes egyenletrendszer megoldása. Itt a z ismeretlen együtthatói lesznek a c_1, c_2 és c_3 számok, a konstansok pedig d_1, d_2 és d_3.

Ha egy egyenletrendszernek nincs megoldása vagy végtelen sok megoldása van, azt a számológép a MATH ERROR hibaüzenettel jelzi.

Próbáld ki a számológépedet a tanórákon látott egyenletrendszerek megoldásának ellenőrzéséhez!

Másod- és harmadfokú egyenletek megoldása



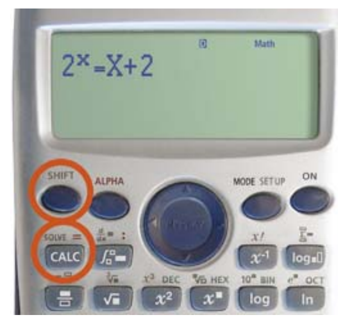
Ugyanezen számológéptípusok segítségével könnyedén meghatározhatod a másodfokú egyenlet mindkét megoldását. Ezt a funkciót többnyire a MODE gomb megnyomásával tudod elérni. Itt válaszd ki az EQN (equation = egyenlet) opciót, majd ezen belül a másodfokú egyenletet (QUAD vagy $ax^2 + bx + c = 0$)!

Az egyenlet együtthatóit az a, b, c értékek alatt adhatod meg, az = gomb megnyomásával. A negatív együtthatók megadásához használd a (–) gombot! A mezők között a nyílgombok segítségével is mozoghatsz. Az utolsó együttható megadása után az = gomb ismételt megnyomásával kapod meg az első és a második megoldást is. Az együtthatók között a fel-le nyílgombokkal is tudsz váltani. Ha a másodfokú egyenletnek nincs megoldása (tehát a diszkrimináns negatív), azt a számológép a MATH ERROR hibaüzenettel jelzi.

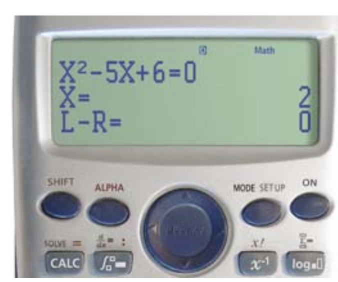
Próbáld ki a számológépedet az órán megoldott feladatok végeredményeinek ellenőrzésére!
Láthatod, hogy a számológépeden a harmadfokú egyenlet is szerepel. (CUBE vagy $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ opció.) A másodfokú egyenlet megoldásához hasonlóan tudod megadni az együtthatókat, majd kiíratni az x_1, x_2 és x_3 megoldásokat.
Érdekes: A harmadfokú egyenletnek – bármilyen együtthatókat is adsz meg – mindig lesz legalább egy megoldása a valós számok halmazán. Gondold végig, vajon miért lehet ez!

Tetszőleges egyenletek megadása és megoldása

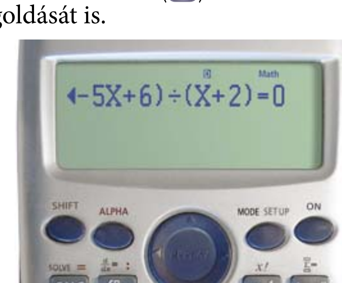
Ezen számológépek legerősebb funkciója, hogy gyakorlatilag bármilyen megadott egyenlet *egy megoldását ki tudják számítani*. Ehhez a számológép alternatív gombjai, tehát a SHIFT, 2ndf, a legtöbb számológépen pedig az ALPHA gomb megnyomásával elérhető funkciók között kell X és = gombokat megkeresned.
Figyelj! Ez az = gomb nem azonos a műveletvégző parancsoknál – tehát az általad korábban – használt = gombbal!
Ezen gombok és a műveletvégző ((+), (–), (÷), (×)), valamint a hatvány, tört, trigonometrikus és logaritmikus gombok segítségével írhatsz be tetszőleges egyenletet. Az egyenlet két oldalát az alternatív = gombbal kell elválasztanod.



Írd be a számológépedbe a $2^x = x + 2$ egyenletet! Ez az egyenlet egy exponenciális egyenlet, mely algebrai úton igen nehezen oldható csak meg.
Az egyenlet megoldását a számológép a SOLVE alternatív gomb megnyomásával kezdi el. A számológép egy „Solve for X” üzenetet ír ki, jelezve, hogy az egyenletet x-re fogja megoldani. (Az itt látható szám nem az egyenlet megoldása, hanem a legutóbbi, a számológép memóriájában megmaradt végeredmény.) Az = gomb megnyomása után akár hosszabb időt is igénybe vehet a megoldás, de végül megadja az x ismeretlen számolt értékét. ($x = 2$)
Az L–R érték a számológép által használt közelítő módszer pontossága. A 0 érték igen pontos végeredményt jelent. A számológéped csupán *egy* megoldását adja meg az egyenletednek, bármilyen egyenletet is írsz be! Ráadásul előfordulhat, hogy az egyenlet valamely triviális, általad is keresett megoldása helyett egészen máshol talál, akár rossz közelítéssel is megoldást. Ez a fukció tehát szintén nem alkalmas a megoldások menetének helyettesítésére, de igen jó eszköz a feladat (akár előzetes) ellenőrzésére.
Most írd be az $x^2 - 5x + 6 = 0$ egyenletet a számológépedbe!



Ennek az egyenletnek könnyen kiszámolhatod mindkét megoldását (most már akár az EQN funkcióval is): 2 és 3. A számológép ezen funkciója csupán az $x = 2$ megoldást írja ki végeredményül. Ez persze megoldása az egyenletednek, de nem az *összes* megoldása. A további megoldások megtalálásához egy apró trükkre van szükség.
A másodfokú egyenletek során találkoztunk a másodfokú függvények gyöktényezős alakjával. Az $x^2 - 5x + 6$ gyöktényezős alakja például: $(x - 2)(x - 3)$. Ha tehát az eredeti egyenletet elosztjuk $(x - 2)$-vel, akkor éppen egy olyan egyenletet kapunk, aminek a 2 már nem lesz megoldása, a 3 viszont még igen. Célszerű a nullára rendezett egyenleteket osztani, hiszen így csak a bal oldalra kell beírnunk az osztást.
Írd be az $(x^2 - 5x + 6)\div(x - 2) = 0$ egyenletet a számológépedbe! Figyelj a zárójelekre! Használhatod a tört gombot is a beíráshoz. Ennek az egyenletnek a megoldása már megadja az eredeti egyenleted $x = 3$ megoldását is.



Ha ezzel a gyöktényezővel $(x - 3)$ is leosztod az egyenletedet, a számológéped igen sokáig fog számolni, végül a Can’t Solve üzenetet írja majd ki. Ennek az egyenletnek már nem lesz több megoldása!
Keresd meg a $2^x = x + 2$ egyenlet másik megoldását is! Célszerű az egyenletet először 0-ra rendezni, tehát $2^x - x - 2 = 0$ formában megadni. Ha jól dolgoztál, a számológéped kiadja az $x = -1{,}69$ (kerekítve) végeredményt. Van-e több megoldása az egyenletnek?
Keresd meg a $2^x = |x + 1|$ egyenlet összes megoldását!

SZÁMÍTÓGÉPES MEGOLDÁSOK, SEGÉDPROGRAMOK HASZNÁLATA

A programok telepítése előtt győződjünk meg a használati jogosultságról!

1. Ábrázoljuk a *GeoGebra* program segítségével a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto ax^2 + bx + c$ másodfokú függvényeket ($a \neq 0$)!

Segítség

– Hozzunk létre egy-egy *csúszkát* a, b, illetve c névvel, állítsuk a lehetséges értékeiket a vizsgálni kívánt eseteknek megfelelően.

– Definiáljuk az $f(x) = ax^2 + bx + c$ képlettel az f függvényt (vagy az $y = ax^2 + bx + c$ képlettel egy parabolát, amelyik az f függvény grafikonja). Ekkor a program a csúszkán beállított aktuális értékeknek megfelelően rajzol egy parabolát, ha az a csúszka értéke nem 0.

– Ha $a = 1$, $b = c = 0$, akkor éppen az origó tengelypontú, felfelé nyitott normál-parabolát kapjuk.

– Változtassuk a csúszkák értékét és figyeljük, hogyan változik a függvény grafikonja (a parabola tengelye, tengelypontja, a parabola állása és a normál-parabolához képesti „kövérsége”).

Kiegészítés

– Az a, u, v nevű csúszkák létrehozása után dinamikusan vizsgálhatók az $x \mapsto a(x-u)^2 + v$ függvények is.

– A *GeoGebra* program alkalmas más függvények grafikonjának megjelenítésére is. Ábrázolhatók adott intervallumon értelmezett függvények, vagy intervallumonként más-más hozzárendelési szabályú függvények is.

2. Ábrázoljuk a függvényt, vizsgáljuk a zérushelyét, szélsőértékét (és monotonitását) a *Graph* program segítségével! (Ingyenes matematikai szoftver, letölthető a www.padowan.dk oldalról.) A program többek között magyar nyelvű menüvel is futtatható, a kívánt nyelvi környezet a *Szerkesztés* → *Beállítások* (angol nyelvű környezetben az *Edit* → *Options*) menüpontban választható ki.

Segítség

– A programban a *Függvény* → *Függvény* beszúrása menüpontban adjuk meg a függvény hozzárendelési szabályát és a függvény értelmezési tartományát, ügyelve a szintaxisra (például tizedes pontot kell használnunk, a négyzetgyök függvény neve *sqrt*(), az abszolútérték-függvény neve *abs*(), a hatványkitevőt az AltGr+3 billentyűkombináció lenyomását követően lehet beírni, például így: *x*^5)! Állítsuk be a grafikon színét, vonalvastagságát!

– Jelöljük meg a vizsgálni kívánt függvényt, és indítsuk el a Számítások menüpontban a *Számítás*-t. Ekkor megjelenik egy segédtáblázat (jellemzően a képernyő bal alsó részén).

– A segédtáblázatban az *Illesztés* legördülő menüjében kiválaszthatjuk, hogy milyen vizsgálatot szeretnénk. Például a zérushely kereséséhez az *„x tengelyhez”* sort kell választani. Ezután a kiválasztott függvény grafikonján egérrel kattintva a zérushely közelében, a program azonnal kiírja a segédtáblázatban a zérushelyet (és a „zérushelyhez” tartozó helyettesítési értéket, továbbá az adott helyen az első és második derivált értékét is, ha ezek léteznek).

Megjegyzés

A *Graph* program alkalmas pontsorok megjelenítésére, illetve a pontsorok egyes pontjait összekötő szakaszok megjelenítése után akár vonaldiagram megjelenítésére is.

3 Egyenlet, egyenletrendszer és egyenlőtlenség (grafikus) megoldására akár a *Graph*, akár a *GeoGebra* program is használható.

Segítség
Egyismeretlenes egyenlet, egyenlőtlenség megoldása:
– Ábrázoljuk a kiválasztott program segítségével az egyenlet bal, illetve jobb oldalán álló kifejezéssel definiált függvényeket (a megfelelő értelmezési tartományon).
– Ha az egyenlet egyik oldalán a 0 áll, akkor olvassuk le az ábrázolt függvény zérushelyét; ha nem, akkor az ábrázolt két függvény metszéspontjának (metszéspontjainak) első koordinátája adja az egyenlet megoldását.
– Az egyenlet megoldásának ismeretében az egyenlőtlenség megoldása értelemszerűen adódik.

Kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása a *Graph* programban akkor lehetséges, ha mindkét egyenlet egy-egy függvény grafikonjának egyenlete. A *Geogebra* program alkalmas más görbék ábrázolására is, tehát akkor is alkalmazható, ha az egyenletrendszer egyenletei nem függvénygrafikonok egyenletei.
Az egyenletrendszer megoldásának lépései:
– Ábrázoljuk a program segítségével a két egyenletnek megfelelő két görbét.
– A két görbe egy közös pontjának két koordinátája adja meg az egyenletrendszer egy megoldását; több közös pont esetén természetesen több megoldása van az egyenletrendszernek.

4 Egybevágósági transzformációk tulajdonságainak vizsgálata a *GeoGebra* program segítségével.

Segítség
– Adjuk meg a transzformáció jellemző adatát (a tükrözés/forgatás középpontját vagy a tükrözés tengelyét vagy az eltolás vektorát) és a transzformálni kívánt pontot (vagy akár egy egész síkidomot, esetleg egy külső forrásból importált képet).
– A menüsor alatt található ikonok közül gördítsük le a *transzformációs ikont*, válasszuk ki a kívánt transzformációt, kattintsunk rá. Ekkor az ikon ábrája a kívánt transzformációnak megfelelően megváltozhat (alaphelyzetben a tengelyes tükrözés ikonja látható).
– Egérrel jelöljük ki a transzformálni kívánt objektumot, kattintsunk a transzformáció ikonjára, majd a transzformációt definiáló objektumra (pontra vagy egyenesre vagy vektorra). Ekkor a program a kiválasztott objektumon végrehajtja a kívánt transzformációt. (Forgatásnál előbb még kéri a forgatás irányát és szögét is.)
– Változtassuk folyamatosan a transzformációt definiáló objektumot, és figyeljük meg, hogyan változik meg az eredeti és a transzformált objektum kölcsönös helyzete.
– Maradjon változatlanul a transzformációt definiáló objektum és változtassuk folyamatosan a transzformálni kívánt objektumot. Figyeljük meg, hogyan változik a képalakzat.

5 Középpontos hasonlósági transzformáció tulajdonságainak vizsgálata a *GeoGebra* program segítségével.

Segítség
– Adjuk meg a hasonlóság középpontját (pl. C) és a transzformálni kívánt pontot (pl. P).
– Hozzunk létre egy csúszkát (legyen a neve k) és válasszuk meg a kívánt értéktartományát! Állítsuk a csúszkát az 1-től és a 0-tól különböző értékre (pl. 1.5-re)!
– A menüsor alatt található ikonok közül gördítsük le a *transzformációs ikont*, válasszuk ki a *centrális nyújtás* menüt.
– Kattintsunk először a P ponton, majd közvetlenül ezután a C ponton. A felugró ablakba írjuk be a hasonlóság arányát (k), majd kattintsunk a *Rendben* gombra. Ekkor megjelenik a P pont P' képe a C középpontú, k arányszámú középpontos hasonlóságnál. A k értékét a csúszka segítségével változtatva vizsgálható az eredeti és a transzformált pont viszonya.
– A fenti eljárás egy adott pont helyett egész alakzatokra is alkalmazható; például kört, tetszőleges sokszöget, de akár egy tetszőleges képet is nagyíthatunk, kicsinyíthetünk.

NÉHÁNY FELADAT VÉGEREDMÉNYE

46. lecke: 2. d) $a = 2\sqrt{2} \approx 2{,}82$; $b = 3$; $c = \sqrt{5} \approx 2{,}24$. **3. a)** $x \mapsto x^2 + 2$. **b)** $x \mapsto (x + 4)^2$. **4. a)** $x \mapsto |x + 4|$, ill. $x \mapsto |x + 4| + 2$. **c)** $x \mapsto |x| + 2$, ill. $x \mapsto |x + 4| + 2$

47. lecke: 1. a) 12. **b)** 8. **2. a)** 2,82 cm. **b)** 0 cm. **3. a)** ≈ 2,24; 2. **d)** 2,24; 2,24; 3,61; 3,61; 0; 4,12; 2,82. **6. a)** 5 cm. **b)** 8,54 cm. **c)** 6,93 cm; 4 cm.

48. lecke: 3. a) 6,5 cm; 6,5 cm. **b)** 10 cm. **5. b)** mind igaz.

49. lecke: 2.-3**i**; -4**j**. **3. c**; **g**; **h**; **f**; **e**; **d**. **4. c**; **c** $-$ **b**; **b** $+$ **c** $-$ **a**; **a** $-$ **b** $+ \frac{1}{2}$**c**.

50. lecke: 1. a) igen. **b)** nem. **c)** igen. **3.**10 N; 17,3 N.

51. lecke: 1. a) **a** = (1; −2); **b** = (3; 1); **c** = (0; 3); **d** = (−2; 0). **b)** **i** = (1; 0); **j** = (0; 1). **2. a)** **a** = (−2; 1); **b** = (2; 1); **c** = (−4; 1); **d** = (3; −2). **b)** **u** = (1; 0); **v** = (0; 1). **3. a)** 28,2 N; 28,2 N. **b)** 40 N; 40 N. **c)** 115 N; 115 N.

52. lecke: 1. a) 4; 3,2; 9; 5; 4; 9,9, illetve 6,4; 4,8; 14,4; 10,8; 8. **c)** Nem megoldható: 2., 4. **2.** 16,8 m. **3.** 29:23.

53. lecke: 1. b) 44 m^2; 110 m^2; 110 m^2; 275 m^2. **3. b)** 2.

54. lecke: 3. c) 36 cm^2; 16 cm^2; 4 cm^2.

55. lecke: 3. 2; 4. **4.** oldallapok területe: 3532 cm^2; 56 511 cm^2; 883 cm^2; 1766 cm^2. **5.** 4; 64; 10 000; 2.

56. lecke: 1. a) $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{8}$. **b)** 12,5 cm és 13,3 cm; 8 cm és 10,7 cm; 7,5 cm és 9,38 cm. **2. a)** 5 dm; 5 dm és 6 dm. **b)** 5 cm; 5 cm és 6 cm. **3.** 7; 19; 37.

Ráadás lecke: 1. a) 17 mm. **b)** 130; 65; 71; 71; 76; 32; 16; 17; 17; 19; 6,52; 7,11; 7,12; 7,66. **c)** ≈ 1 : 4. **d)** ≈ 1 : 400. **e)** 25°; 130°; 25°; 66°; 25°; 130°; 25°. **2. a)** 2859 mm. **b)** 29 mm. **c)** 15 mm. **3. c)** 20 m; 13,006 m.

57. lecke: 1. 0,01 m^2. **2. b)** ≈ 11,8 cm. **c)** ≈ 23,6 m. **4. a)** 12**i**. **b)** **0**.

58. lecke: 1. a) 74° és 52°. **c)** ≈ 9–9,5 cm. **d)** ≈ 90–95 m. **e)** Eltérés: 9,1 m. **3. b)** 2 cm; 6 cm. **c)** 3,33 cm.

59. lecke: 4. a) 7 cm; 16,8 cm; 18,2 cm. **b)** 18,2 cm. **c)** 21,9 cm és 34,3 cm. **d)** 12,1 cm; 14,6 cm; 22,9 cm.

60. lecke: I. 1. b) 3 cm; 1,5 cm; 3 cm; 4,5 cm. **2.** 0,75 cm^2, 3,75 cm^2, 4,5 cm^2. **II. 1. c)** $\frac{1}{4}$. **f)** $\frac{5}{4}$. **g)** 19,2 mm.

61. lecke: I. 1. a) 5 cm; 6 cm és 4 cm. **2. a)** 5 cm; 6 cm; 4 cm; 5 cm; 6 cm; 4 cm. **II. 1. a)** 21,2 cm^3 és 148,4 cm^3. **d)** 2,65 cm^3; 18,5 cm^3; 50,3 cm^3; 98,0 cm^3. **2.** ≈ 3,7 cm.

Ráadás lecke: 2. c) 1,618-szor. **3. b)** 4,85 cm; 6,47 cm; 8,09 cm. **c)** 3,09 cm; 7,42 cm; 16,1 cm.

62. lecke: 1. a) 171,9°. **b)** 28,6°. **c)** 180°. **d)** 360°. **2.** 57,3°. **3. a)** 1,40-szor. **b)** 2π-szer. **c)** 0,0175-szer. **d)** 2,09-szor. **5. a)** 1,26 radián. **b)** 1,2 dm.

63. lecke: 2. a) 165°. **b)** 105°. **c)** 264°. **d)** 24°. **3. a)** 16,1 cm. **b)** 0,28 cm. **4. a)** 56,35 cm^2. **b)** 0,98 cm^2.

64. lecke: 1. a) 4,05 m. **b)** 3,56 cm. **c)** 19,8 cm^2. **2. a)** 100 000-szer. **b)** 1 km. **3.** 40 cm. **4.** Konvex.

65. lecke: a) térfogatok: 1 : 8 : 27 : 64. **c)** 700 cm^3; 1900 cm^3; 3700 cm^3. **d)** 1 : 7 : 19 : 37. **3.** 1 : 2. **4. a)** (0; −2); (−0,8; 1,6); (1; 1); (1; 0); (0; 1). **b)** 10,4 cm; 8,5 cm, 8,5 cm; 0 cm.

67. lecke: 2. a) 4,2 cm; 5,96 cm. **b)** 25°; 65°. **4. a)** 4 cm. **b)** igaz. **c)** 2; $\frac{1}{2}$.

68. lecke: 3. $9{,}46 \cdot 10^9$ km. **4.** 524 m^2 ± 9,25 m^2. **5. a)** 0,4877 km $\le h \le$ 0,5317 km.

69. lecke: 1. b) 219,8 dm. **c)** 236 dm. **2.** 27,3 m. **3. b)** 1,15°-os. **4.** 90°; 90°; 60°; 120°. **5. a)** 54,7°; 35,3°.

70. lecke: 3. b) 70 m. **d)** 243 m.

71. lecke: 2. a) 8,96 cm és 10,78 cm. **b)** 30°és 60°. **3. a)** 130 m. **b)** 6 cm.

72. lecke: 1. c) az első esetben.

73. lecke: 2. a) 57,6 m. **b)** 198 m^2. **3. a)** 113°. **b)** 35,48 cm és 77,56 cm. **c)** 698 cm^2.

74. lecke: 2. a) $\frac{1}{2}$. **b)** $\sqrt{3}$. **c)** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **d)** 1. **3.** 4,78 cm és 5,52 cm; 15,08 cm. **5. a)** 1; $\sqrt{\frac{3}{2}}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$. **b)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\sqrt{2}$; 1; 1. **c)** $\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{6}}$. **d)** $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$; 3; 3.

75. lecke: 1. a) 165 000 m^2. **b)** 22 400 m^2. **2. a)** 97,1 cm^2. **b)** 29°; 60°; 135,5°; 135,5°; 68,7 cm^2; 19,6 cm. **3. a)** 48,6°. **b)** 1 m és 0,5 m.

76. lecke: 1. a) 90°. **b)** 90°. **c)** 90°. **2. a)** 29 cm; 114 cm. **b)** 67,4°. **3.** derékszög: a) c) d). **4. a)** 19,4°. **b)** 16,4° és 15,1°.

Ráadás lecke: 1. a) 27,3°. **b)** 385 m. **2. b)** 3,2 cm; 4,53 cm; 5,54 cm. **d)** 35,3°. **3.**16,4°; 37,5°; 47,8°. **4. a)** 35,3°. **b)** 54,7° **5.** 19,5°; 65 m.

78. lecke: 1. ≈ 8,1 m. **3. a)** 13,8 m^2.

79. lecke: 1. a) {0; 0,5}. **b)** {−1; 0}. **c)** {0; 0,5}. **3. a)**]−0,75; 0,75[. **b)** [−4; 4]. **c)**]−∞; −2] ∪ [2; ∞[**d)**]−1; 1[.

80. lecke: 2. a)]−2; 0[. **b)**]−∞; −2] ∪ [0; ∞[. **c)**]−∞; −3] ∪ [0; ∞[. **d)**]−3; 0[. **3. a)** [−1; 2]. **b)**]−∞; −3] ∪ [1; ∞[. **4. a)** −4 és 1. **b)** 1,2 és −5. **c)** −2

és 0,5. **5. a)** $]-\infty; -4] \cup [1; \infty[$. **b)** $[-5; 1{,}2]$. **c)** $[-2; 0{,}5]$.
HÁZI FELADAT 1. a) $[-1; 3]$. **b)** $M = \mathbf{R}$. **2. a)** $[0; 5]$. **b)** $[2; 3]$. **c)** $]-\infty; 0] \cup [5; \infty[$. **d)** $]-\infty; 2] \cup [3; \infty[$
3.]200;. 500[.
81. lecke: 1. a) $\mathbf{R} \setminus \{-3\}$. **b)** $]-\infty; -5] \cup [-1; \infty[$. **c)** **R**. **2. a)** $[0; 6]$. **b)** $[1; 5]$. **c)** $\{3\}$. **3. a)** $-12{,}25$. **b)** $-3{,}125$. **c)** 0. **d)** 2,5. **4. a)** $[-3; 2]$. **b)** $\{-2\}$. **c)** $[-1; 0]$.
5. a) $]-\infty; -1] \cup [3; \infty[$. **b)** $]1; 4[$. **c)** $]-1; 3[$.
Ráadás lecke: FELADAT 1. a) $]-1; 2[$. **b)** $]-\infty; -1[\cup]2; \infty[$. **c)** nincs megoldás. **d)** **R**.
2. a) $]-\infty; 5[$. **b)** $]-\infty; -3[\cup]-2; \infty[$
82. lecke: 1. a) ± 1; ± 5. **b)** $\pm 0{,}5$; ± 3. **c)** ± 4. **d)** -1; 2. **2.** ± 1. **3.** 11,5°. **4. a)** 48,2°. **b)** 26,6°. **5. a)** 30°; 19,5°. **b)** 75,5°.
83. lecke: 1. e) 34 dm. **f)** 34 dm. **2.** 12,5 cm; 15 cm. **3.** 0,8 dm; 1,6 dm. **4. a)** 11 cm, 33 cm és 17 cm. **b)** 20,2 cm.
84. lecke: 1. 8 cm, 15 cm. **2.** 13,5 dm^2. **3. a)** 12 cm és 16 cm. **b)** 10 cm. **c)** 192 cm^2. **d)** 19,2 cm. **4.** 40 mm, 9 mm, 80 mm. **5.** 24 mm; 35 mm; 42,4 mm.
85. lecke: 1. 36. **2.** 72. **3.** 62. **4. a)** $(11; -3)$ és $(-3; 11)$. **b)** $(8; -7)$ és $\left(\frac{21}{2}; -\frac{16}{3}\right)$. **5. a)** $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{5}\right)$ és $\left(\frac{2}{5}; \frac{2}{3}\right)$ **b)** $(5; 3)$; $(-5; -3)$; $(3; 5)$ és $(-3; -5)$.
RÁADÁS lecke: 1.$(39; 13)$ és $(-13; -39)$. **2.**$(1; 7)$; $(7; 1)$; $\left(\frac{7+\sqrt{17}}{2}; \frac{7-\sqrt{17}}{2}\right)$ és $\left(\frac{7-\sqrt{17}}{2}; \frac{7+\sqrt{17}}{2}\right)$.
3. $[-4; -2] \cup [1; 3]$.
86. lecke: 1. Zakariás vagy Félix. **2.** 8-an. **3.** 50 $\frac{km}{h}$, 60 $\frac{km}{h}$. **4. a)** $(-1; 2)$; $(-4; 5)$. **b)** $(-3; 3)$; $(3{,}25; 0{,}5)$.
87. lecke: 1. b. **2. b)** $(1{,}5; 0{,}75)$. **c)** $-\frac{2}{3}$. **3.** 2. **4. a)**$]-\infty; -1[$. **b)** $[-3; 2]$. **c)** $]-\infty; 2]$; $[-3; -1[$; $[-1; 2]$. **5.** $(40; 15)$; $(-30; -20)$.
89. lecke: 1. a) $]-; 0[\cup]3; \infty[$. **b)** $[-1{,}5; 6]$. **2.** 56 cm. **3. a)** $[4; 10]$. **b)** $]-1; 3[$. **4.** 2; -2; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$. **5.** 28 tanuló, 3500 Ft. **6.** 267 kg $\leq x <$ 375 kg. **7. a)** 52 mm. **b)** 26,7 mm. **8.** 72. **9.** kb. 73 másodperc. **10.** 7.

TÁRGYMUTATÓ

TARTALOM