

Matematika

ELSŐ KÖTET

10

ÚJGENERÁCIÓS TANKÖNYV



Matematika

ELSŐ KÖTET



10.

Eszterházy Károly Egyetem
Oktató- és Fejlesztő Intézet

A tankönyv megfelel az 51/2012. (XII. 21.) EMMI-rendelet:

3. sz. melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 9–12. évfolyama számára 3.2.04 Matematika

6. sz. melléklet: Kerettanterv a szakközépiskolák 9–12. évfolyama számára 6.2.03 Matematika megnevezésű kerettantervek előírásainak.

Tananyagfejlesztő: Barcza István, Basa István, Tamásné Kollár Magdolna

Alkotószerkesztő: Tamásné Kollár Magdolna

Vezetőszerkesztő: Tóthné Szalontay Anna

Tudományos szakmai lektor: Pálfalvi Józsefné

Pedagógiai lektor: Bánky Judit

Olvasószerkesztő: Füleki Lászlóné, Mikes Vivien

Fedél: Orosz Adél

Látvány- és tipográfiai terv: Gados László, Orosz Adél

Illusztráció: Létai Márton

Szakábra: Szalóki Dezső, Szalókiné Tóth Annamária

Fotók:

PIXABAY, FLICKR, WIKIPEDIA, 123RF, NTK archívum, ©CULTIRIS: (Somogyi-Tóth Dániel), (Lugosi Lugo László).

A tankönyv szerkesztői ezúton is köszönetet mondanak mindazoknak a tudós és tanár szerzőknek, akik az elmúlt évtizedek során olyan módszertani kultúrát teremtettek, amely a kísérleti tankönyvek készítőinek is ösztönzést és példát adott. Ugyancsak köszönetet mondunk azoknak az íróknak, költőknek, képzőművészeknek, akiknek alkotásai tankönyveinket gazdagítják.

© Eszterházy Károly Egyetem, 2017

ISBN 978-963-436-029-2

Eszterházy Károly Egyetem • 3300 Eger, Eszterházy tér 1.

Tel.: (+36-1) 460-1873 • Fax: (+36-1) 460-1822 • Vevőszolgálat: vevoszolgalat@ofi.hu

A kiadásért felel: dr. Liptai Kálmán rektor

Raktári szám: FI-503011001/1

Műszakiiroda-vezető: Horváth Zoltán Ákos • Műszaki szerkesztő: Orosz Adél • Grafikai szerkesztő: Kovács Borbála

Nyomdai előkészítés: Gados László • Terjedelem: 17,51 (A/5) ív, tömeg: 346,65 gramm

A könyvben felhasználásra került a Matematika 10. Közel a mindennapokhoz című mű,
Konsept-H Könyvkiadó, Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt., 2013. Szerzők: dr. Korányi Erzsébet és dr. Marosvári Péter.
Alkotószerkesztő: Környei László. Felelős szerkesztő: Bognár Edit. Lektor: Somfai Zsuzsa.

1. kiadás, 2018

Az újgenerációs tankönyvek az Új Széchenyi Terv Társadalmi Megújulás Operatív Program 3.1.2-B/13-2013-0001 számú, „A Nemzeti alaptantervhez illeszkedő tankönyv, taneszköz és Nemzeti Köznevelési Portál fejlesztése” című projektje keretében készült. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők:
Herczegné Kaszás Judit, Zarubay Attila

Engedélyszám:

TKV/9-18/2017 (2017. 03. 27–2022. 08. 31)

Nyomta és kötötte az Alföldi Nyomda Zrt., Debrecen
Felelős vezető: György Géza vezérigazgató
A nyomdai megrendelés törzsszáma:

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

ELŐSZÓ – A TANKÖNYV TÉMAKÖREI

Sok szeretettel köszöntünk az új tanévben!

Ahogy évről évre előrébb lépünk a tanulásban, egyre szélesebb területet ölel fel a matematika, és emellett egyre mélyebb, érdekesebb összefüggésekre derül fény. Ez adja a matematika szépségét és játékoságát. Szeretnénk, ha sok örömöd lenne ezek felfedezésében. De emellett a matematika, a matematikai modellek használata és a matematikai gondolkodás az élet számos területén előfordul. Ez a tankönyv – hasonlóan, mint a tavalyi – szeretne felvillantani sok-sok kapcsolódási pontot és gyakorlati alkalmazást.

Az egyes leckékben a következő típusú részekkel találkozhatasz:

BEVEZETŐ

Sok esetben egyszerű és gyakorlati problémák vezetnek érdekes matematikai kérdésekhez. Ilyenekre találhatsz példát a lecke elején a BEVEZETŐ-ben.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Ebben a részben részletes magyarázatokkal mutatjuk be egy konkrét feladat megoldását.

ELMÉLET

Itt rendszerezzük a matematikai tartalmakat. Megfogalmazzuk a pontos matematikai fogalmakat (definíciók) és állításokat (tételek) is.

FELADATOK

Igyekeztünk változatos feladatokat összeállítani egy-egy órára, a könnyebbekkel kezdve. A feladatokat nehézségük szerint szinteztük. A  jel arra utal, hogy a feladat megoldásához nemcsak matematikai tudás szükséges, hanem többféle szempontú elemzés és probléma megoldás. Ezek az úgynevezett kompetencia feladatok.

CSOPORTMUNKÁ

Néhány esetben ezt a munkaformát javasoljuk a feladatok megoldására.

HÁZI FELADAT

4-5 feladat az otthoni munkához.

RÁDÁS

Itt matematikai érdekességeket, ötletes és izgalmas feladatokat találsz.

EMELT SZINT: Ezek a részek túlmutatnak a középszintű érettségi követelményeken. Az emelt szintű érettségi követelményeihez tartozó fogalmak, feladattípusok, illetve szép, precíz bizonyítások találhatók ezekben a részekben.

Ha tartós tankönyved van, amit vissza kell adnod az iskolának a tanév végén, akkor ne írd a tankönyvbe, dolgozz a füzetedbe! (Táblázatok esetén segítségedre lehet egy öntapadós jegyzetömb: egy öntapadós lapot tegyél a táblázat mellé, s arra írhatod az eredményeket.)

1. Logika

– IGAZ VAGY HAMIS?

Minden kék oroszlán növényevő. Igaz-e az állítás? Mi a tagadása?

– A KÖTŐSZAVAKON SOK MÚLIK.

Mézet vagy tejet? – Mindkettőt. – válaszolta Micimackó.

2. Középértékek és a négyzetgyökök

– EGY FONTOS EGYENLŐTLENSÉG

Ugyanannyival nő / ugyanannyiszorosára nő ismét a fizetés – hogyan járunk jobban?

– A GYÖKVNÁS AZONOSSÁGAI

A gyökjel alatt, a gyökjel előtt; két gyökjelből egyet...

3. Geometriai mérések, számítások

– EGYBEVÁGÓ HÁROMSZÖGEK

A részletek megegyeznek. Az egész is ugyanaz?

– KÉT ÚJ TÉTEL A DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGRŐL

Mértani közép a derékszögű háromszögben

4. Másodfokú függvények

– ELTOLJUK A GRAFIKONT

Fel-le, jobbra-balra. Változik a hozzárendelés. Hogyan mozdul a grafikon?

– A MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNY GRAFIKONJA

Parabolák minden mennyiségben

5. Másodfokú egyenletek

– LEHET TÖBB MEGOLDÁS!

Segít a megoldó képlet.

– SZÖVEGES FELADATOK

Kertekről, utazásról, vásárlásról, pénzügyekről...

KIDOLGOZOTT FELADAT

Bence, Tamás és Péter szállodát terveznek. A szálloda 3 emeletes lesz, és egy tó partján fog állni.

Azt számolják, mennyi lehet a legnagyobb napi bevétel. A földszinten lesznek a közösségi helyiségek, egy-egy emeleten pedig 20 kétágyas erkélyes szoba. A tóra néz emeletenként 5 szoba, ezek az első osztályúak, oldalról a tóra néz mindkét oldalon szintén 5-5 szoba, ezek a másodosztályúak. A hátsó front az út felé fordul, itt vannak a harmadosztályú szobák. A másodosztályúak ára 80%-a az első osztályú szobák árának, a harmadosztályúak ára 80%-a a másodosztályú szobák árának.

Foglaljuk táblázatba, mennyi a napi bevétel, ha tele a szálloda?

Megoldás

Telt ház esetén így alakulna a napi bevétel:



Hányad osztályú?	Hány darab van a 3 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.	15	A	15A
II.	30	0,8A	$30 \cdot 0,8A = 24A$
III.	15	$0,8 \cdot (0,8A) = 0,64A$	$15 \cdot 0,64A = 9,6A$

Tehát a legnagyobb (maximális) napi bevétel:

$$15A + 24A + 9,6A = 48,6A \text{ forint lenne.}$$

FELADAT

1. 📢 – Mivel a szállodában nincs lift, a harmadik emeleti szobákat olcsóbban kellene kiadni. – töpreng Péter.
– Legyenek a harmadik emeleti szobák 20%-kal olcsóbbak, mint az alattuk lévők. Ekkor viszont a harmadik emeleti hátsó szobák már negyedosztályúak lennének.

Számold ki, mennyi lenne ezzel az új feltétellel a maximális napi bevétel! Töltsd ki a táblázatot!

Hányad osztályú?	Hány darab van a 3 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.		A	
II.		0,8A	
III.		$0,8 \cdot (0,8A) = 0,64A$	
IV.			

A legnagyobb (maximális) napi bevétel az I–IV. osztályú szobák bevételeinek összege.

2. 📢 Tamás szerint az új feltétellel a harmadik emeleti szobákból szerezhető bevétel éppen 80%-a a második emeleti szobák együttes árának. Így a táblázatos módszernél sokkal egyszerűbben meg lehet kapni az előző feladat eredményét.

a) Igaz-e Tamás állítása?

b) Oldd meg Tamás ötletével és a kidolgozott feladat eredményével az előző feladatot!

3. 📢 Péter ezt írta fel az 1. feladathoz:

$$(48,6 : 3) \cdot 2,8 = 45,36.$$

Vajon mire gondolt?

4. 📢 Bencének eszébe jutott, hogy nem kellene ragaszkodni a négyzet alakú alapterülethez. Háttha több bevételt lehetne elérni úgy, hogy növelnék az első

osztályú szobák számát (de emeletenként továbbra is 20 szoba lenne). Hogyan változna a bevétel, ha

- a) emeletenként 6 szoba nézne a tóra és az út felé is, a többi pedig oldalról nézne a tóra;
- b) emeletenként 7 szoba nézne a tóra és az út felé is, a többi pedig oldalról nézne a tóra?



Készítsd el a füzetedben az a) és a b) változathoz tartozó táblázatot, és töltsd ki őket! Számold ki mindkét esetben a teljes bevételt is!

a)

Hányad osztályú?	Hány darab van a 3 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.		A	
II.		0,8A	
III.		$0,8 \cdot (0,8A) = 0,64A$	
IV.		$0,8 \cdot (0,64A)$	
A teljes bevétel:			

b)

Hányad osztályú?	Hány darab van a 3 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.		A	
II.		0,8A	
III.		$0,8 \cdot (0,8A) = 0,64A$	
IV.		$0,8 \cdot (0,64A)$	
A teljes bevétel:			

- 5 – Ha lenne lift – szól közbe Bence –, akkor esetleg 4 emeleten is el lehetne helyezni a 60 szobát, és így spórolnánk az alapozásnál! Ekkor nem kellene olcsóbban adni az emeleti szobákat, csak az számít, hogy egy szoba a tóra néz, oldalra vagy hátrafelé. Hogyan helyeznéd el 4 emeleten a 60 szobát? Válassz egy konkrét elrendezést, és számold ki ebben az esetben a legnagyobb napi bevételt!

Hányad osztályú?	Hány darab van a 4 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.		A	
II.		0,8A	
III.		$0,8 \cdot (0,8A) = 0,64A$	
A teljes bevétel:			

HÁZI FELADAT

- 1 a) Bence a 4 emeletes, 60 szobás, liftes szállodát négyzet alapúnak tervezné, az alsó három emeletén 16–16 szobát helyezne el. A 4. emeleten mindegyik szoba a tóra vagy legalábbis oldalról a tóra nézne. Mennyi lenne így a maximális napi bevétel?

Hányad osztályú?	Hány darab van a 4 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.		A	
II.		0,8A	
III.		$0,8 \cdot (0,8A) = 0,64A$	
A teljes bevétel:			

- b) Péter nem tervezne oldalról a tóra néző szobákat, és nem ragaszkodik ahhoz sem, hogy négyzet alapú legyen az épület. Mekkora bevétel érhető el így? Két esetben töltsd ki a táblázatot, és számold ki a legnagyobb napi bevételt!

Hányad osztályú?	Hány darab van a 4 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.		A	
II.		0,8A	
III.		$0,8 \cdot (0,8A) = 0,64A$	
A teljes bevétel:			

Hányad osztályú?	Hány darab van a 4 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.		A	
II.		0,8A	
III.		$0,8 \cdot (0,8A) = 0,64A$	
A teljes bevétel:			

- 2 Készíts tervet egy olyan 3 emeletes szállodához, ahol mindegyik oldalon emeletenként legalább két szoba van, és számold ki, telt ház esetén maximális a bevétel!

1 IGAZ VAGY HAMIS

FELADAT

- 1 Egy gimnázium női kosárlabda-bajnokságán 8 csapat indult. A következő hírek terjedtek el a 11. B csapatáról:

A: Második lett.
 B: Nem a második helyen végzett.
 C: Nem jutott a legjobb három közé.
 D: Dobogós helyen végzett.
 E: Utolsó lett.
 F: Győzött.



- a) Készítsd el a füzetedbe az alábbi táblázatot! A táblázat felső sorába beírtuk, hogy a 11. B osztály csapata hányadik helyezést ért el a kosárlabda-bajnokságon. Írd be a táblázatba, hogy az egyes esetekben melyik hír igaz és melyik hamis! Segítségül néhány mezőt előre kitöltöttünk.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	hamis	igaz	hamis					
B	igaz	hamis						
C								
D								
E								
F								

- b) A füzetedben írd a pontozott helyekre a megfelelő mondat betűjelét úgy, hogy a megfogalmazott kijelentés igaz legyen!

Ha A igaz, akkor csak a(z) ... igaz, a többi hír hamis.

Ha A hamis, akkor csak a(z) ...-ről tudjuk biztosan, hogy igaz, a többi hír azonban lehet igaz is és hamis is.

Ha C igaz, akkor biztos, hogy ... igaz, A ... és F pedig hamis, de előfordulhat, hogy a(z) ... igaz, meg az is, hogy hamis.

Ha C hamis, akkor ... biztosan igaz, ... biztosan hamis, a többi hír azonban lehet igaz is és hamis is.

Fogalmazzatok meg szóban a fentiekhez hasonló, igaz állításokat!

- 2 Van-e az 1. feladat szerint a 11. B lánycsapatának olyan helyezése, amely esetében mind a 6 adott mondat tartalma hamis? Ha igen, akkor ez hányadik helyezés, ha nem, akkor miért nem?

Megfigyelések

Érdekes kapcsolatot találunk az A és a B mondat között: ha A igaz, akkor B hamis, ha A hamis, akkor B igaz; és hasonlóan:

ha B igaz, akkor A hamis, ha B hamis, akkor A igaz.

Ugyanezt tapasztaljuk a C és a D kijelentés esetében:

ha C igaz, akkor D hamis, ha C hamis, akkor D igaz; és hasonlóan:

ha D igaz, akkor C hamis, ha D hamis, akkor C igaz.

A logika szakkifejezései szerint A, B, C, D, E és F egy-egy állítás, A és B egymás tagadása, C és D egymás tagadása.

E és F nem tagadása egyik szereplő állításnak sem.

Miért? Például E „ellentétes tartalmú” A-val (egyszerre nem lehet igaz mindkettő), de több olyan eset is van, amikor mindkettő hamis (ha a csapat sem második, sem utolsó nem lett). Hasonlóan: a C nem tagadása az F-nek, mert előfordulhat, hogy mindkettő hamis.

Ha hallunk vagy olvasunk egy mondatot, akkor sokszor azonnal tudjuk, hogy a tartalma igaz vagy hamis. Más esetekben kisebb-nagyobb töprengés után tudjuk eldönteni, hogy mi vele a helyzet. Vannak olyan mondatok is, amelyekről egyáltalán nem mondhatjuk ki azt, hogy a tartalmuk igaz vagy hamis.

1. A logikában azokat a kijelentő mondatokat nevezzük **állításoknak** (más szóval: **kijelentéseknek**), amelyekről egyértelműen eldönthető, hogy a tartalmuk igaz vagy hamis.

Példák

Igaz állítás	Hamis állítás	Nem állítás (nem kijelentés)
A 29 prímszám.	A 25 és a 35 legnagyobb közös osztója 15.	Hány óra van?
Minden háromszögben 180° a belső szögek összege.	Minden háromszög beírt körének középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja.	Bence okosabb, mint Hajni.
A Nap nagyobb, mint a Hold.	A naptárban szerda után kedd következik.	A legszebb virág a kikerics.

2. Egy állítás *igaz* vagy *hamis* lehet csak, **harmadik eset nincs**.

Ha egy állítás nem *igaz*, akkor csak *hamis* lehet és hasonlóan: ha egy állítás nem *hamis*, akkor csak *igaz* lehet.

Megjegyzés

Azt is szoktuk mondani, hogy egy **állítás logikai értéke** csak igaz vagy hamis lehet.

3. Minden állításnak van **tagadása**, ami egy másik állítás. Egy A állítás tagadása akkor igaz, ha az A hamis, és akkor hamis, ha az A igaz. Az A állítás tagadásának a jele: $\neg A$ (olvasd: „nem A ”).

FELADAT

3. Melyik állítás lesz az első állítás tagadása, B vagy C ? Bár mindkettő olyan, hogy nem teljesül egyszerre az A állítással, de a kettő közül csak az egyik olyan, hogy pontosan akkor igaz, amikor az A hamis, és akkor hamis, amikor az A igaz. Csak ezt nevezzük az A állítás tagadásának. Válaszd ki, melyik ez!

- a) A : Panniék kutyája fekete.
 B : Panniék kutyája tarka.
 C : Panniék kutyája nem fekete.
- b) A : Többen vagyunk az osztályban, mint 32.
 B : Kevesebben vagyunk az osztályban, mint 32.
 C : Kevesebben vagyunk az osztályban, mint 33.

4. Istvánék utcájában parkol néhány autó. István körbenéz, és megszólal:
 „Az utcában minden autó Opel.”
 Válaszd ki, hogy a következő állítások közül melyik tagadása István mondatának! Több jó megoldást is találsz!

- A : Nincs az utcában Opel.
 B : Az utcában minden autó Skoda.
 C : Van olyan autó az utcában, amely nem Opel.
 D : Az utcában nem minden autó Opel.
 E : Van az utcában Skoda is.

5. Megadunk 5 állítást:
 A : A 0-ra végződő természetes számok oszthatók 5-tel.
 B : A 0-ra és az 5-re végződő természetes számok oszthatók 5-tel.
 C : Nem igaz, hogy a 0-ra végződő természetes számok oszthatók 5-tel.
 D : A 0-ra végződő természetes számok nem oszthatók 5-tel.
 E : Az 5-tel osztható természetes számok nem mind végződnek 0-ra.
- a) Melyik igaz, melyik hamis?
 - b) A , B , C , D , E kijelentések közül melyik lehet az A állítás tagadása?

- 6** Hosszú Katinka, többszörös olimpiai és világ-bajnok úszónk, 20 éves korában 2009-ben szerezte élete első világbajnoki érmeit. Részlet egy 2009-ben írt újságcikkből: „A 2009-es római úszó-világ bajnokságon Verrasztó Evelyn és a selejtezőben új Európa-rekordot elérő (2 p 9,12 mp) Hosszú Katinka (a képen) is bejutott a 200 m-es női vegyes úszás döntőjébe, előbbi az ötödik, utóbbi pedig a hetedik legjobb eredménnyel. A döntőben Katinka nagyszerűen úszva, gyönyörű hajrával, saját rekordját megjavítva, 2 p 7,46 mp-es új Európa-csúccsal csapott a célba. Verrasztó Evelyn is kiváló teljesítményt nyújtott, és végül a hetedik helyen zárt.”

- a) Mi volt a két úszónő sorrendje a selejtezőben, a középöntőben és a döntőben?
- b) Mennyit javított Hosszú Katinka a saját Európa-rekordján?
- c) Biztos, lehetséges vagy lehetetlen az, hogy Hosszú Katinka megnyerte ezt a versenyt?
- d) Mit felelnél az előző kérdésre, ha Európa-bajnokságról lenne szó?
- e) Az újsághír ismeretében biztos, lehetséges vagy lehetetlen az, hogy Hosszú Katinka ezen a versenyen bronzérmet nyert? (Válaszod helyességéről meggyőződhetsz, ha utána nézel, mi történt valójában.)

HÁZI FELADAT

- 1** Fogalmazd meg az órai 1. feladatban szereplő állítások tagadását! Mit tapasztalsz?
- 2** Részlet egy újságcikkből: „Verrasztó Evelyn szerezte a magyar úszócsapat első érmét 2009. december 10-én, az isztambuli rövidpályás Európa-bajnokságon, ahol a 200 m vegyes döntőjében 2:04.64-es (2 p 4,64 mp) világcsúcsidővel érdemelte ki az első helyet. Nyolc nappal később a manchesteri úszógálán ugyanezen a távon az amerikai Julia Smit 2:04.60 perccel (2 p 4,60 mp) csapott a célba.” Biztos-e, lehetséges-e, lehetetlen-e, hogy



- a) 2009. december 11-én Verrasztó Evelyn tartotta a 200 m-es rövidpályás női vegyes úszás Európa-csúcsát?
 - b) 2009. december 19-én 2:04.64 perc volt a 200 m-es női rövidpályás vegyes úszás Európa-csúcsa?
 - c) 2009. december 19-én 2:04.60 perc volt a 200 m-es női rövidpályás vegyes úszás világcsúcsa?
- 3** Cseh László Európa-csúcsot úszott a rövidpályás országos bajnokságon. Közvetlenül a verseny után
- a) Dönci azt állítja, hogy a magyar országos csúcs ennél biztosan gyengébb;



- b) Bence azt, hogy az országos csúcs pontosan ugyanennyi;
c) Hajni szerint a világcsúcs ennél biztosan jobb. Kinek van igaza?

4 📡 Megadunk 7 állítást:

A: A páros számok mind 2-re végződnek.

B: A páros számok mind 0-ra végződnek.

C: A páros számok nem mind végződnek 2-re.

D: A páros számok 2-re vagy 0-ra végződnek.

E: A 2-re végződő számok páros számok.

F: Van olyan páros szám, amely 2-re végződik.

G: Van olyan páros szám, amely nem 2-re végződik.

a) Melyik igaz, melyik hamis?

b) A fenti kijelentések között van-e két olyan, amely egymás tagadása?

RÁADÁS

- 1.** 📌 a) Egy bérház bérlői elhatározták, hogy megvásárolják az épületet. Úgy döntöttek, hogy mindenki arányosan járul hozzá a vételár kifizetéséhez, mégpedig aszerint, hogy mekkora az általa bérelt lakás alapterülete. Tehát ha például valaki a 20%-át bérlő a teljes bérelhető területnek, akkor ő a vételár 20%-át fizeti ki.

Döntsd el az alábbi kijelentések mindegyikéről, hogy igaz vagy hamis! Válaszaidat indokold a füzetedben!

A: A nagyobb alapterületű lakásban lakó többet fizet 1 m^2 megvásárlásáért, mint a kisebb lakásban lakó.

B: Ha ismerjük két lakás alapterületét és tudjuk, hogy az egyik lakás bérlője mennyivel járul hozzá a vételárhoz, akkor tudjuk azt is, hogy a másik lakás bérlője mennyit fizet.

C: Ha ismerjük a bérház vételárát és tudjuk, hogy mennyivel járulnak hozzá a vételárhoz az egyes bérlők, akkor azt is tudjuk, hogy mekkora az egyes lakások alapterülete.

D: Ha sikerülne 10%-ot lealkudni az épület vételárából, akkor minden bérlőnek 10%-kal kevesebbet kellene fizetnie a bérház megvásárlásához.

- b) A bérház 3 lakásból áll, ezek alapterülete rendre 95 m^2 , 85 m^2 és 70 m^2 .

A bérház vételára 30 millió forint. Mennyivel kell hozzájárulnia a 85 m^2 -es lakás tulajdonosának a vételárhoz?

- 2.** 📌 Az egyik 7. osztályos matematikaórán mindegyik tanuló magasságát megmérték. A mérések szerint a fiúk átlagmagassága 160 cm, a lányoké pedig 150 cm. Anna volt a legmagasabb, 180 cm, Dani a legalacsonyabb: 130 cm. A mérés napján két tanuló hiányzott, de másnap mindenki ott volt a matematikaórán, a két előző napi hiányzó is. Megmérték ennek a két tanulóknak a magasságát is, aztán újrászámolták az átlagmagasságokat. Meglepetve tapasztalták, hogy sem a fiúk, sem a lányok átlagmagassága nem változott. Milyen következtetéseket lehet levonni a fentiekből? Döntsd el az alábbi kijelentésekről, hogy helyes következtetések-e! Válaszaidat indokold is füzetedben!



A: Mindkét hiányzó tanuló lány volt.

B: Az egyik hiányzó tanuló lány volt, a másik fiú.

C: Mindkét hiányzó tanulóknak ugyanakkora a magassága.

D: A jelen lévő tanulók magasságának átlaga az első napon ugyanannyi volt, mint a második napon.

E: A második napon is Dani volt a legalacsonyabb a tanulók között.

CSOPORTMUNKA

Dolgozzatok párban! A füzetbe készítsétek el a táblázatot, és töltsétek ki!

- 1.** Mi van a szobában, lány vagy szörny? A tavalyi tanév végén már találkozhattatok egy ilyen jellegű feladattal. Most négy esetben gondoltok végig, van-e olyan szoba, amelyben biztosan lány van, és vajon melyik az! A táblázatok segítenek a megoldásban.

A orosz Zaptor – Kovalens Kapitánnyal folytatott csatája során – foglyul ejtett néhány ártatlan lányt, majd erődjébe zárta. Mikor a Kapitány sarokba szorította Zaptort, ő a következő feladványok elé állította hősnöket. A torony mindegyik emeletén két ajtó található. Az ajtók mögött vagy egy túsul ejtett lány van, vagy Zaptor egy félresikerült kísérletének végeredménye.

- a)** Az egyik felirat igaz, a másik hamis.

Lehet, hogy mindkét szobában egy-egy lány van, de az is lehet, hogy egyikben egy lány, a másikban egy szörny.



Töltsétek ki a táblázatot!

Ez van az 1. szobában	Ez van a 2. szobában	Az 1. szoba felirata igaz vagy hamis?	A 2. szoba felirata igaz vagy hamis?	Megfelel-e az „egyik igaz, másik hamis” feltételnek?
Lány	Lány			
Lány	Szörny			
Szörny	Lány			

Melyik szobát érdemes választani?

- b)** Vagy mindkét felirat igaz, vagy mindkettő hamis. Lehet, hogy mindkét szobában egy-egy lány van, de az is lehet, hogy egyikben lány, a másikban egy szörny.



Töltsétek ki a táblázatot!

Ez van az 1. szobában	Ez van a 2. szobában	Az 1. szoba felirata igaz vagy hamis?	A 2. szoba felirata igaz vagy hamis?	Megfelel-e a „vagy mindkettő igaz, vagy mindkettő hamis” feltételnek?
Lány	Lány			
Lány	Szörny			
Szörny	Lány			

Gondoltok végig egy másik irányból is! Töltsétek ki a következő táblázatot!

Az 1. szoba felirata	A 2. szoba felirata	Ez van az 1. szobában	Ez van a 2. szobában	Lehetséges?
igaz	igaz			
hamis	hamis			

Melyik szobát érdemes választani?

- c)** A következő emeleten az ajtók felirata más. Vagy mindkét felirat igaz, vagy mindkettő hamis. Lehet, hogy mindkét szobában egy-egy lány van, de az is lehet, hogy egyikben lány, a másikban egy szörny.



Töltsétek ki a táblázatokat!

Ez van az 1. szobában	Ez van a 2. szobában	Az 1. szoba felirata igaz vagy hamis?	A 2. szoba felirata igaz vagy hamis?	Megfelel-e a „vagy mindkettő igaz, vagy mindkettő hamis” feltételnek?
Lány	Lány			
Lány	Szörny			
Szörny	Lány			

Az 1. szoba felirata	A 2. szoba felirata	Ez van az 1. szobában	Ez van a 2. szobában	Lehetséges?
igaz	igaz			
hamis	hamis			

Melyik szobát érdemes választani?

- d) Ha az 1. szobában lány van, akkor a felirat rajta igaz, ha szörny van benne, akkor viszont hamis. Míg a 2. szobában pont fordított a helyzet, ha ott lány van, akkor a felirat hamis, ha szörny van benne, akkor igaz.



Melyik szobát érdemes választani?

Ez van az 1. szobában	Ez van a 2. szobában	Az 1. szoba felirata igaz vagy hamis?	Megfelel az 1. szobáról szóló feltételnek?	A 2. szoba felirata igaz vagy hamis?	Megfelel a 2. szobáról szóló feltételnek?
Lány	Lány				
Lány	Szörny				
Szörny	Lány				

Miután harcképtelenné tette a gonosz pusztítót, a Kapitány kiszabadította és biztonságba helyezte a lányokat.



2. Egy úszóversenyen négy iskola csapata került döntőbe: az Aranyhegyi, a János-hegyi, a Lakihegyi és a Pál-völgyi. A végeredményről a következőket tudjuk:

- Az egyik szélső pályán úszó versenyző győzött.
- A fekete sapkás a sárga és a kék sapkás közé került.
- Csak egy olyan úszó volt, aki ugyanannyiadik helyezést ért el, mint ahányadik pályán úszott, és ez nem a győztes volt.
- A lakihegyisnek fekete volt a sapkája.
- A piros sapkás zöld úszónadrágban versenyzett.
- Az aranyhegyis és a lakihegyis pályája nem volt szomszédos.
- A sárga sapkás a 3. és 4. helyezett között úszott.
- A jános-hegyisnek belső pálya jutott.

- a) Melyik iskola úszója lett a győztes?
b) Milyen színű sapkában úszott a 3. helyezett?
c) Kapott-e érmet az aranyhegyis versenyző?

Az alábbi táblázat segíthet a gondolatok rendszerezésében. Másold át a füzetedbe és töltsd ki!

Pálya	1-es pálya	2-es pálya	3-as pálya	4-es pálya
Iskola				
Sapka				
Helyezés				

Megjegyzés: Ez a feladat egy, Einstein nevéhez kapcsolható, logikai feladvány egyszerűsített változata. Állítólag az emberek 98%-a nem tudja helyesen megoldani Einstein feladatát. A Ráadásban bebizonyíthatod, hogy te a kivételes 2%-hoz tartozol!

1. Egy törpe beleesett a tündék csapdájába, de azok nemes lelkek révén felajánlják neki, hogy szabadon bocsájtják, ha elsőre megtalálja a tömlőc kulcsát.



- a) Melyik ládát válassza, ha a tündék azt is elárulják, hogy a három állítás közül csak egy igaz? Töltsd ki a következő táblázatot a füzetedben:

1. láda tartalma	2. láda tartalma	3. láda tartalma	1. láda felirata igaz vagy hamis?	2. láda felirata igaz vagy hamis?	3. láda felirata igaz vagy hamis?	Teljesül-e, hogy „a 3 állítás közül csak egy igaz”?
kulcs	–	–				
–	kulcs	–				
–	–	kulcs				

- b) Hogyan módosul a helyzet, ha a három állítás közül csak egy hamis? Készíts olyan táblázatot, amely segít a megoldásban!

2. Három indián ül a tűz körül: Fehér Tigris, Szürke Egér, Sárga Irigység. Egyszer csak megszólal Fehér Tigris:

– Egyikünk sárga ruhát visel, van közöttünk fehér ruhát és szürke ruhát viselő is, de egyikünk sem olyan színű ruhában van most, mint ami a nevében is szerepel.

– Valóban! – mondta a sárga ruhás.

Milyen színű ruhát viselt Szürke Egér?



3. Frédi a vásárbán három eladótól próbál nyakláncot vásárolni. A három eladónál összesen kétféle egységáron lehetne nyakláncot venni, de mindegyik eladónak csak egyfajta egységárú nyaklánc van. Frédi mindhárom eladónak – az időseknek, a középkorúknak és a fiatalnak is – feltesz egy kérdést:

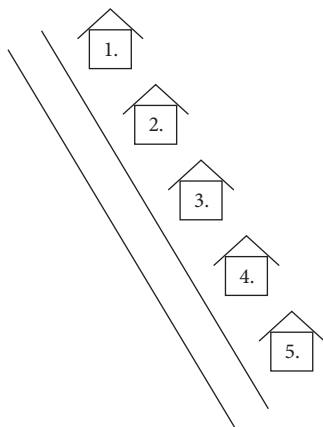
A fiattól ezt kérdezi: „A középkorú eladó drágább nyakláncot árul, mint az idősebb?”

A középkorútól ezt kérdezi: „Az idősebb eladó nyaklánc drágább, mint a fiatalé?”

Az idősebbtől pedig ezt: „Vehetek-e 100 garasért két nyakláncot a vásárbán?”

Mind a három kérdésre ugyanazt a választ (igen, vagy nem) kapta. Vajon sikerült-e Frédinek 100 garasért megvennie a két nyakláncot a vásárbán?

- 📶 Egy utcában van öt egymás melletti, más-más színű ház. Mindegyik házban más nemzetiségű férfi lakik. Mind más-más hangszeren játszik, más italt kedvel és más állatot tart.



1. Az angol piros színű házban lakik.
2. A svédnek kutyája van.
3. A dán teát iszik.
4. A zöld ház közvetlenül a fehér mellett balra van.
5. A zöld ház tulajdonosa kávéat iszik.
6. Aki zongorázik, annak papagája van.
7. A sárga ház tulajdonosa dobol.
8. A középső ház tulajdonosa tejet iszik.
9. A norvég az első házban lakik.

10. A hegedűn játszó férfi szomszédja macskát tart.
11. A brácsás férfi sört iszik.
12. A lovat tartó férfi a dobos mellett lakik.
13. A német trombitál.
14. A norvég a kék ház mellett lakik.
15. A hegedűn játszó férfi szomszédja vizet iszik.

Ki tart halakat? (Segíthet az alábbi táblázat a gondolkodásban. Másold át a füzetedbe!)

	1. ház	2. ház	3. ház	4. ház	5. ház
Ház színe P, S, F, Z, K					
Lakó nemzetisége A, Né, No, D, S					
Hangszer Z, B, D, H, T					
Ital Tea, K, V, S, Tej					
Állat K, P, M, L, H					



Keressetek ezekhez hasonló feladványokat az interneten és osszátok meg egymással őket!

3 ÖSSZETETT ÁLLÍTÁSOK

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Két idősebb férfi, Gyula és Miklós beszélgetnek.
- Emlékszel, Miklós, Kulcsár Győzőre? Ő aztán tudott vívni! – mondja Gyula.
 - Igen, valamikor a 70-es években az iskolatársaimmal izgatottan lestük, szerez-e olimpiai aranyérmet. Úgy emlékszem, jól drukoltunk.
 - Én meg arra emlékszem, hogy mindkét olimpiáról hozott aranyérmet! – idézi fel a 70-es éveket Gyula. Ki emlékszik helyesen?

Megoldás

A 70-es években két olimpia volt, 1972-ben Münchenben és 1976-ban Montrealban.



Miklós emléke két részre bontható:

Kulcsár Győző aranyérmet szerzett a müncheni olimpián	Kulcsár Győző aranyérmet szerzett a montreali olimpián
IGAZ, párbajtőrscapattal aranyérmet nyert.	HAMIS, ekkor nem nyert aranyérmet.

Miklós emléke szerint Kulcsár Győző a müncheni olimpián VAGY a montreali olimpián aranyérmet nyert.

A két állítás egyike igaz, ezért Miklós jól emlékezett.

Gyula emléke ugyanerre a két részre bontható:

Gyula emléke szerint Kulcsár Győző a müncheni olimpián is ÉS a montreali olimpián is aranyérmet nyert.

Gyula rosszul emlékezett. Akkor lenne igaza, ha az állítás mindkét része igaz lenne.

2. Igaz-e a következő állítás:

– Egerszegi Krisztina 1991–1992-ben aranyérmet nyert az úszó-világ bajnokságon vagy az olimpián.
Bence elhatározta, hogy utánanéz ennek a dolognak.



Megoldás

1991-ben úszó-világ bajnokság volt Perth-ben, 1992-ben pedig olimpia Barcelonában.

Az állítás két részre bontható:

Egerszegi Krisztina aranyérmet nyert 1991-ben a világ bajnokságon

Egerszegi Krisztina aranyérmet nyert 1992-ben az olimpián.

A két rész VAGY kötőszóval kapcsolódik egymáshoz. A teljes állítás **IGAZ**, ha a két rész közül **legalább az egyik IGAZ**. Nézzünk utána először a második résznek! Ez a rész **IGAZ**: Egerszegi Krisztina három számban is nyert a barcelonai olimpián.

Nem is kellene ellenőrizni az 1991-es úszó-világ bajnokságot, már tudjuk, hogy a feladat állítása **IGAZ**, akkor is, ha nyert, akkor is, ha nem nyert 1991-ben.

Megjegyzés:

Figyeljük meg a következő két állítást!

Egerszegi Krisztina 1991–1992-ben aranyérmet nyert a világ bajnokságon vagy az olimpián.

Egerszegi Krisztina 1991–1992-ben aranyérmet nyert a világ bajnokságon és az olimpián.

Mivel Egerszegi Krisztina nemcsak az olimpián, hanem az 1991-es világ bajnokságon is aranyérmet nyert, (két számban is), ezért mindkét állítás **IGAZ**.

Két-két állítást (kijelentést) meghatározott módon összekapcsolva olyan újabb állításokhoz juthatunk, amelyek logikai értékét az eredeti állítások logikai értéke egyértelműen meghatározza. Az ilyen összekapcsolásokat **logikai műveleteknek** nevezzük.

Figyeljünk meg két egyszerű logikai műveletet!

Definíció: A **VAGY-művelet** (latinul: *diszjunkció*)

Legyen A és B egy-egy állítás (kijelentés). **A vagy B** (jelekkel: $A \vee B$) azt az állítást jelenti, amely igaz, ha A és B közül legalább az egyik igaz, és hamis, ha mind A , mind B hamis.

Például, ha

A : Hajni jelest kapott matematikából;

B : Hajni jelest kapott történelemből,

akkor $A \vee B$ azt jelenti, hogy Hajni jelest kapott matematikából vagy történelemből (vagy mindkettőből).

A VAGY-művelet igazságtáblázata:

Ha A	és B	akkor $A \vee B$
igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	igaz
hamis	igaz	igaz
hamis	hamis	hamis

vagy
egyszerűbben:

A	B	$A \vee B$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Definíció: Az **ÉS-művelet** (latinul: *konjunkció*)

Legyen A és B egy-egy állítás (kijelentés). **A és B** (jelekkel: $A \wedge B$) azt az állítást jelenti, amely igaz, ha A is és B is igaz, és minden más esetben hamis.

Például, ha

A : Hajni jelest kapott matematikából;

B : Hajni jelest kapott történelemből,

akkor $A \wedge B$ azt jelenti, hogy Hajni jelest kapott matematikából is és történelemből is.

Az ÉS-művelet igazságtáblázata:

Ha A	és B	akkor $A \wedge B$
igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	hamis
hamis	igaz	hamis
hamis	hamis	hamis

vagy
egyszerűbben:

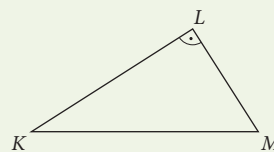
A	B	$A \wedge B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

FELADAT

- 1.** Melyik állítás igaz, melyik hamis?
- a) 24 osztható 3-mal vagy 4-gyel.
 - b) 50 osztható 5-tel és 10-zel.
 - c) 36 osztható 6-tal és 8-cal.
 - d) 48 osztható 12-vel vagy 15-tel.

- 2.** Írj három olyan pozitív egész számot, amely
- a) osztható 18-cal vagy 36-tal;
 - b) osztható 18-cal és 36-tal;
 - c) osztható 18-cal és nem osztható 36-tal;
 - d) osztható 18-cal vagy nem osztható 36-tal!

- 3** Két kijelentést foglalmaztunk meg a rajzon látható KLM háromszögre vonatkozóan.
 A: A KLM háromszög egyenlő szárú; B: A KLM háromszög derékszögű.
 a) Add meg A, illetve B logikai értékét (igaz vagy hamis)!
 b) Foglalmazd meg az $A \vee B$, illetve az $A \wedge B$ kijelentést!
 c) Döntsd el, hogy a b)-ben megfogalmazott két kijelentésnek mi a logikai értéke!



ELMÉLET

- Kapcsoljunk össze *ha...*, *akkor* kötőszavakkal állításokat: *ha A, akkor B*. Ezzel azt állítjuk, hogy ha A állítás igaz, akkor B állítás is igaz. Ha azonban A állítás hamis, akkor a *ha A, akkor B* kijelentés akkor is igaz, ha B igaz, és akkor is igaz, ha B hamis.
 - Amikor *akkor és csak akkor* kötőszavakkal kapcsolunk össze állításokat, akkor azt állítjuk, hogy a két állítás logikai értéke megegyezik: vagy mindkettő igaz, vagy mindkettő hamis.
- Megjegyzés: A Ráadásban többet is megtudhatsz ezekről a műveletekről.

FELADAT

- 4** Milyen logikai műveleti jelet kell írni a pontozott részre, hogy a kijelentés igaz legyen?
 a) Az $(x + 3)(5 - x)$ szorzat akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha $x + 3 = 0 \dots 5 - x = 0$.
 b) Az $(x + 3)^2 + (5 - x)^2$ összeg akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha $x + 3 = 0 \dots 5 - x = 0$.
- 5** Milyen logikai műveleti jelet kell írni a pontozott részre, hogy az állítás igaz legyen?
 Az ab szorzat értéke akkor és csak akkor pozitív, ha $(a > 0 \dots b > 0) \dots (a < 0 \dots b < 0)$.
- 6** Legyen A is és B is egy-egy állítás (kijelentés). Másold be az alábbi táblázatot a füzetedbe, és töltsd ki az üres mezőket a megfelelő logikai értékekkel! Jelölés: $\neg A$ (= nem A) az A kijelentés tagadása. Segítségképpen néhány mezőt kitöltöttünk.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg(A \vee B)$
i	i	h				i	i		
i	h					h	i		
h	i								
h	h								

HÁZI FELADAT

- Rajzolj olyan ábrát, amelyre igaz az alábbi állítás!
 a) Az ABC háromszög egyenlő szárú és derékszögű.
 b) Az $ABCD$ négyszög rombusz és téglalap.
 c) Az $ABCD$ négyszög deltoid vagy paralelogramma.
 d) A megrajzolt sokszög konvex vagy belső szögeinek összege 540° .
- Rajzolj olyan ábrát, amelyre nem igaz (hamis) az alábbi állítás!
 a) Az ABC háromszög egyenlő szárú és derékszögű.
 b) Az $ABCD$ négyszög rombusz és téglalap.
 c) Az $ABCD$ négyszög deltoid vagy paralelogramma.
 d) A megrajzolt sokszög konvex vagy belső szögeinek összege 540° .
- Egészítsd ki az állítást úgy, hogy igaz legyen!
 a) Az $(x - 8)(7 - 2x)$ szorzat akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha ...
 b) Az $(x - 8)^2 + (7 - 2x)^2$ összeg akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha ...

I. Implikáció

Legyen A és B is egy-egy kijelentés.

A belőlük képzett „Ha A , akkor B .” kijelentésre azt mondjuk, hogy az IMPLIKÁCIÓ logikai művelettel kapcsoltuk össze a két kijelentést. Az implikáció jele: $\rightarrow$.

Ennek a logikai műveletnek az igazságtáblázata a következő:

A	B	$A \rightarrow B$		A	B	$A \rightarrow B$
igaz	igaz	igaz	vagy egysze- rűbben:	i	i	i
igaz	hamis	hamis		i	h	h
hamis	igaz	igaz		h	i	i
hamis	hamis	igaz		h	h	i

Az $A \rightarrow B$ kijelentés tehát pontosan akkor hamis, ha A igaz, B pedig hamis.

II. Ekvivalencia

Az A és a B kijelentésből képzett „ A akkor és csak akkor, ha B .” kijelentésre azt mondjuk, hogy az EKVIVALENCIA logikai művelettel kapcsoltuk össze a két kijelentést. Az ekvivalencia jele: $\leftrightarrow$.

Ennek a logikai műveletnek az igazságtáblázata a következő:

A	B	$A \leftrightarrow B$		A	B	$A \leftrightarrow B$
igaz	igaz	igaz	vagy egysze- rűbben:	i	i	i
igaz	hamis	hamis		i	h	h
hamis	igaz	hamis		h	i	h
hamis	hamis	igaz		h	h	i

Az $A \leftrightarrow B$ kijelentés tehát pontosan akkor igaz, ha A és B logikai értéke egyenlő.

III. Kizáró vagy

Az A és a B kijelentésből képzett „Vagy A vagy B .” kijelentésre azt mondjuk, hogy a VAGY-VAGY (kizáró vagy) logikai művelettel kapcsoltuk össze a két kijelentést. A kizáró vagy jele: $\oplus$.

Ennek a logikai műveletnek az igazságtáblázata a következő:

A	B	$A \oplus B$		A	B	$A \oplus B$
igaz	igaz	hamis	vagy egysze- rűbben:	i	i	h
igaz	hamis	igaz		i	h	i
hamis	igaz	igaz		h	i	i
hamis	hamis	hamis		h	h	h

Az $A \oplus B$ kijelentés tehát pontosan akkor igaz, ha A és B logikai értéke különböző.

Például: A „Vagy a cipőt veszed meg vagy a kabátot (veszed meg).” összetett kijelentés igaz, ha csak az egyik tárgyat vásárolod meg, hamis, ha mindkettőt vagy egyiket sem.

A fejlettebb számológépek és a számítógépek ismerik a logikai műveleteket is. Általában a következő névvel lehet ezekre a műveletekre hivatkozni:

Értelme	Gépi neve	A művelet neve
NEM	NOT	tagadás
ÉS	AND	konjunkció
VAGY	OR	diszjunkció
VAGY-VAGY	XOR	kizáró vagy



Ezekkel a műveletekkel informatika órán is találkozhattál már, az Excel táblázat kezelésének tanulásakor. Nézz utána, hogy mit jelent a NAND és NOR művelet és milyen egyéb logikai műveletek találhatók az Excelben!

FELADAT

1. Melyik állítás igaz, melyik hamis? Válaszodat indokold!

- A Ha egy valós szám reciproka egyenlő saját magával, akkor a négyzete is egyenlő saját magával.
- B Ha egy valós szám négyzete egyenlő saját magával, akkor reciproka is egyenlő saját magával.
- C Ha egy valós szám négyzete kisebb, mint maga a szám, akkor a szám kisebb mint 1.
- D Ha egy valós szám kisebb, mint 1, akkor a négyzete kisebb, mint maga a szám.

E Egy valós szám négyzete akkor és csak akkor kisebb, mint saját maga, ha a szám pozitív, de kisebb, mint 1.

2. Írd fel a következő kifejezések igazságtáblázatát!

- a) $A \rightarrow \neg B$
- b) $\neg A \vee \neg B$
- c) $A \leftrightarrow (A \vee B)$
- d) $(A \wedge B) \oplus \neg B$

Melyik kifejezések ekvivalensek? Van-e köztük két olyan, hogy implikáció van köztük?

BEVEZETŐ

Figyeljünk meg egy olyan nyitott mondatot, amelyből egy mondatrész hiányzik:

A Tisza című verset ... írta.

Ha a kipontozott helyre beírjuk egy költő nevét, akkor egy kijelentést kapunk:

A Tisza című verset József Attila írta.

Ez hamis kijelentés.

A Tisza című verset Petőfi Sándor írta.

Ez igaz kijelentés.

Ha nem Petőfi nevét írjuk be a kipontozott helyre, akkor a kapott állítás logikai értéke: hamis.

Figyeljünk meg néhány olyan nyitott mondatot, amelyből egy vagy két szám hiányzik:

6-szor ... nagyobb, mint 100;

$$6x > 100;$$

... szor ... nagyobb, mint 100;

$$xy > 100;$$

6-szor ... nagyobb, mint ...;

$$6x > y.$$

Ha a kihagyott helyekre, illetve az x , y betűk helyére egy-egy számot írunk, kijelentéseket, állításokat kapunk. Ezek a kijelentések lehetnek igazak vagy hamisak.

– Ha például a $6x > 100$ nyitott mondatba 8-at írunk az x helyébe, akkor a $6 \cdot 8 > 100$ hamis kijelentést kapjuk.

Ha nem 8-at, hanem például 18-at írunk, akkor a $6 \cdot 18 > 100$ igaz kijelentést kapjuk.

– Ha például a $6x > y$ nyitott mondatba 8-at írunk az x helyébe és 2-t az y helyébe, akkor a $6 \cdot 8 > 2$ igaz állítást kapjuk, ha 3-at írunk az x helyébe és 22-t az y helyébe, akkor a $6 \cdot 3 > 22$ hamis állítást kapjuk.

A nyitott mondat önmagában sem nem igaz, sem nem hamis!

A VAGY-műveletet meg az ÉS-műveletet nyitott mondatok esetére is értelmezzük.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Megadunk két nyitott mondatot, A -t és B -t, alaphalmaznak mindkettőhöz a 15-nél kisebb pozitív egész számok halmazát választjuk.

A : az n egy 4 és 12 közötti egész szám,

B : az n prímszám.

Írjuk a nyitott mondat változója (n) helyébe az alaphalmaz elemeit, és vizsgáljuk meg, hogy az így kapott kijelentések igazak vagy hamisak! Foglaltuk táblázatba az eredményeket! (Például, ha n helyébe a 3-at írjuk, akkor az A nyitott mondatból az „a 3 egy 4 és 12 közötti egész szám” kijelentést kapjuk, míg a B nyitott mondatból az „a 3 prímszám” kijelentést. Az első kijelentés hamis, a második igaz. Lásd a sötétített oszlopot!

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>
B	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>h</i>

Az A nyitott mondat igazsághalmaza: {5; 6; 7; 8; 9; 10; 11}, a B nyitott mondat igazsághalmaza: {2; 3; 5; 7; 11; 13}.

Itt $A \vee B$ azt a nyitott mondatot jelenti, amely

- **igaz**, ha olyan 15-nél kisebb pozitív egész számot választunk n -nek, amelynek esetében az A és a B nyitott mondatok közül legalább az egyik igaz;
- **hamis**, ha olyan 15-nél kisebb pozitív egész számot választunk n -nek, amelynek esetében az A és a B nyitott mondat is hamis.

Tehát a táblázatot így egészíthetjük ki:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	h	h	h	h	i	i	i	i	i	i	i	h	h	h
B	h	i	i	h	i	h	i	h	h	h	i	h	i	h
$A \vee B$	h	i	i	h	i	i	i	i	i	i	i	h	i	h

A táblázatról leolvashatjuk, hogy az $A \vee B$ kijelentés igazsághalmaza: $\{2; 3; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 13\}$.

Hasonlóan:

$A \wedge B$ azt a nyitott mondatot jelenti, amely

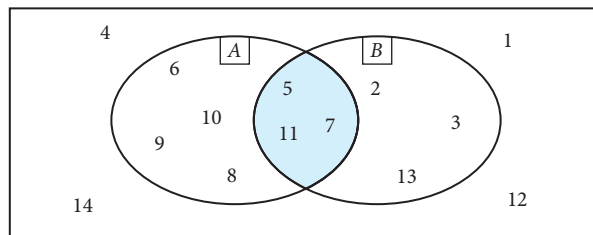
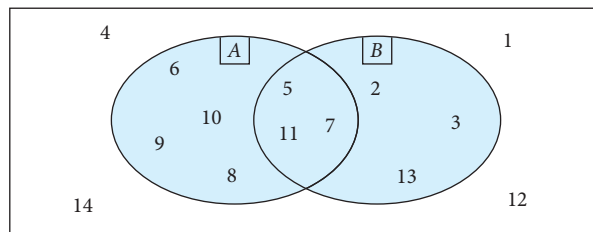
- **igaz**, ha olyan 15-nél kisebb pozitív egész számot választunk n -nek, amelynek esetében az A és a B nyitott mondat is igaz;
- **hamis**, ha olyan 15-nél kisebb pozitív egész számot választunk n -nek, amelynek esetében az A és a B nyitott mondat közül valamelyik (vagy mindkettő) hamis.

Tehát az első táblázatot így egészíthetjük ki:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	h	h	h	h	i	i	i	i	i	i	i	h	h	h
B	h	i	i	h	i	h	i	h	h	h	i	h	i	h
$A \wedge B$	h	h	h	h	i	h	i	h	h	h	i	h	h	h

A táblázatról leolvashatjuk, hogy az $A \wedge B$ nyitott mondat igazsághalmaza: $\{5; 7; 11\}$.

Most halmazábrákon szemléltetjük az A és a B megoldáshalmazát.



Az ábrákról leolvashatjuk:

- az $A \vee B$ nyitott mondat igazsághalmaza az A és a B igazsághalmazának az *uniója*;
- az $A \wedge B$ nyitott mondat igazsághalmaza az A és a B igazsághalmazának a *metszete*.

FELADAT

1. Az x egy (-6) -nál nagyobb és 8 -nál kisebb egész szám. Megadunk négy nyitott mondatot:

$A: x + 3 = 0; \quad B: 5 - x = 0; \quad C: (x + 3)(5 - x) = 0;$

$D: (x + 3)^2 + (5 - x)^2 = 0.$

- a) Töltsd ki a füzetedben az *igaz* és *hamis* szavakkal (i -vel és h -val) a táblázatot! Segítségképpen néhány mezőt előre kitöltöttünk.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
A	h	h	i										
B	h												
C	h												
D	h												
$A \vee B$	h												
$A \wedge B$	h												

- b) Melyik nyitott mondatnak mi az igazsághalmaza az adott alaphalmazon?

- c) Bence szerint ha $A \vee B$ igaz, akkor C is igaz, ha $A \vee B$ hamis, akkor C is hamis. Helyesen gondolkozik-e? Melyik halmaz az $A \vee B$ igazsághalmaza?
- d) Hajni szerint ha C igaz, akkor $A \vee B$ is igaz, ha C hamis, akkor $A \vee B$ is hamis. Helyesen gondolkozik-e?
- e) Dönci szerint ha D igaz, akkor $A \vee B$ is igaz, ha D hamis, akkor $A \vee B$ is hamis. Helyesen gondolkozik-e?
- f) Joci szerint ha D igaz, akkor $A \wedge B$ is igaz, ha D hamis, akkor $A \wedge B$ is hamis. Helyesen gondolkozik-e? Melyik halmaz az $A \wedge B$ igazsághalmaza?
- g) Bence szerint ha $A \wedge B$ igaz, akkor D is igaz, ha $A \wedge B$ hamis, akkor D is hamis. Helyesen gondolkozik-e?

2. A következő nyitott mondatok alaphalmaz a pozitív, egyjegyű egész számok halmaza. Töltsd ki a táblázatot a füzetedben!
 A: n osztható 3-mal.
 B: n osztója 12-nek.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	h	h	i						
B	i								
$A \wedge B$									
$A \vee B$									

3. A következő nyitott mondatok alaphalmaz a $\{-6; -4; -2; 0; 2; 4; 6\}$ halmaz.
 A: $x - 3 > 0$
 B: $x - 3 < 0$
 C: $x - 1 > 0$
 D: $x - 1 < 0$
 E: $\frac{x-3}{x-1} > 0$

- a) Vizsgáld meg a nyitott mondatok igazsághalmazát, és töltsd ki a táblázatot a füzetedben!

	-6	-4	-2	0	2	4	6
A							
B							
C							
D							
E							
$A \wedge C$							
$B \vee D$							

- b) Igaz-e:

- Ha A és C igaz, akkor E is igaz.
- Ha E igaz, akkor A és C is igaz.
- Ha B és D igaz, akkor E is igaz.
- Ha E igaz, akkor B és D is igaz.

- c) Melyik állítás igaz, melyik hamis?

- Ha egy törtnek a nevezője is és a számlálója is pozitív, akkor a tört pozitív.
- Ha egy tört pozitív, akkor a nevezője is és a számlálója is pozitív.

- d) Fogalmazd meg, mit állíthatunk egy törtről, ha a tört értéke pozitív!

4. Szemléltesd halmazábrával a következő nyitott mondatok igazsághalmazát! Az alaphalmaz a 20-nál kisebb pozitív páratlan számok halmaza.

A: n prímszám.

B: n osztható 3-mal vagy 5-tel,

C: $(n+1)$ osztható 4-gyel.

Fogalmazd meg olyan nyitott mondatot, melynek igazsághalmaz:

a) $A \cap B$

b) $C \setminus A$

c) $A \setminus (B \cup C)$

d) $(B \cup C) \setminus A$

HÁZI FELADAT

1. Oldd meg az 1. feladatot azzal a változtatással, hogy az A helyett az A^* : $x + 3 > 0$ nyitott mondatot veszed!

2. Az x egy (-6) -nál nagyobb és 6 -nál kisebb egész szám. Vizsgáld a következő nyitott mondatokat!

A: $x + 2 \geq 0$ D: $x + 8 < 0$

B: $x + 2 \leq 0$ E: $\frac{x+2}{x+8} \geq 0$

C: $x + 8 > 0$

- a) Töltsd ki a füzetedben az igaz és hamis szavaknak megfelelő i , illetve h betűkkel a táblázatot!

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
A											
B											
C											
D											
$A \wedge C$											
$B \wedge D$											

- b) Melyik kijelentésnek mi az igazsághalmaza?
- c) Vizsgáljuk a feladattal kapcsolatban a következő négy kijelentést!
- ha A igaz, akkor B hamis
- ha A hamis, akkor B igaz
- ha C igaz, akkor D hamis
- ha C hamis, akkor D igaz
- Ezek mindig igazak, akármelyik számot írjuk az x helyébe az alaphalmazból! – mondja Jócó.

– Dehogy, ezek mindig hamisak, bármelyik alaphalmazbeli elemet írjuk az x helyébe! – mondja Dönci.

Bence az arany középutat képviseli, szerinte van olyan állítás, amely esetén Jócónak van igaza, és van olyan, amelyik esetében Döncinek.

Tegyél igazságot!

- d) Igaz-e, hogy az $(A \wedge C) \vee (B \wedge D)$ nyitott mondat igazsághalmaza ugyanaz, mint az E nyitott mondaté?

RÁADÁS

- 1.® Egy újságban két hirdetés jelent meg.

Alfa irodaház		
Bérelt terület	58 m ² –95 m ² között	100–120 m ² között
Bérleti díj	475 tallér havonta	800 tallér havonta

Béta irodaház	
Bérelt terület	35 m ² –260 m ² között
Bérleti díj	90 $\frac{\text{tallér}}{\text{m}^2 \cdot \text{év}}$

Egy cég vezetője vagy, a céged egy 110 m²-es és egy 60 m²-es irodahelyiséget szeretne bérelni egy évre,

ugyanabban az irodaházban. Melyik irodaházat választanád a kedvezőbb bérleti díj elérése érdekében? Írd le a gondolatmenetedet is!

- 2.® A mindennapok során gyakran találkozhatunk olyan helyzetekkel, amelyekben érvekkel próbálnak meggyőzni minket valamely állítás igazságáról vagy tartathatatlanságáról. Olykor nem könnyű eldöntenünk, hogy az elhangzó kijelentésekkel egyetértünk vagy inkább ne.

Az alábbiakban egy példán keresztül te is megértheted, hogy mennyire fontos a gondos mérlegelés, mielőtt döntenénk.

Egy országban a védelmi kiadások 2010-ben 30 millió tallért tettek ki.

Ebben az évben az ország éves mérlegében a „kiadások összesen” rovatban 500 millió tallér szerepelt.

2011-ben a védelmi kiadásokra 35 millió tallért fordítottak, míg az éves mérlegben a kiadás oldalon 605 millió tallér szerepelt. A vizsgált időszakban az infláció 10% volt (2011-ben „átlagosan” minden 10%-kal többbe került, mint egy évvel korábban).

Kétféle szerepben kell értékelned az adatokat (2012 elején). Érvelj a szerepednek megfelelően!

- a) Egy civil szervezet szerint a kormány túl sokat költ védelmi kiadásokra. A szervezet tagjaként azt kell „bizonyítanod”, hogy a kormány egyre többet fordít erre a célra.
- b) Egy hadiipari cég képviselőjeként azt kell „bizonyítanod”, hogy a kormány egyre kevesebbet költ az ország védelmére.

FELADAT

1. ☞ Döntsd el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis minden a, b, c és d szám esetén, vagy csak bizonyos számok esetén igaz! ($b \neq 0$ és $c + d \neq 0$)

a) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ c) $\frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$
 b) $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c+d} + \frac{b}{c+d}$

2. ☞ Van olyan település Magyarországon, amelynek van Laurencia nevű lakosa.

Melyik állítás tagadása a fenti kijelentésnek:

- A: Minden magyar településen lakik Laurencia.
 B: Van olyan magyar település, amelynek nincs Laurencia nevű lakosa.
 C: Nincs olyan magyar település, amelynek van Laurencia nevű lakosa.

3. ☞ Egészítsd ki a kijelentést úgy, hogy igaz legyen!

Az $\frac{x+2}{x+8}$ tört pontosan akkor nem negatív, ha ...

4. ☞ Írj az x , illetve az y helyébe olyan számokat, hogy a megfogalmazott kijelentések igazak legyenek!

- a) $x + y = 4 \wedge x - y = 2$
 b) $x + y = 4 \vee x - y = 2$
 c) $(x + y)(x - y) = 0$
 d) $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 0$

5. ☞ Vizsgáld meg a következő nyitott mondatokat!

A: $x + 8 < 19$

B: x osztható 3-mal

C: $x - 11 \geq 25$

Adj meg három olyan pozitív egész számot, melyet x helyébe írva:

- a) $A \wedge B$ állítás igaz
 b) $\neg B \vee C$ állítás igaz;
 c) $\neg B \vee C$ állítás hamis;
 d) $(A \vee B) \wedge C$ igaz!

TUDÁSPRÓBA

1. ☞ Igaz vagy hamis? Határozd meg a következő kifejezések logikai értékét!

- A: 18 osztható 9-cel.
 B: 9 osztható 18-cal.
 C: 18 nem osztható 9-cel.
 D: 9 nem osztható 18-cal.

2. ☞ A $\{2; 4; 6; 8; 10\}$ halmaz elemei közül melyiket helyettesíthetjük az x helyében, hogy igaz legyen a következő állítás:

- a) $x + 2 > 7 \wedge 3x < 30$;
 b) $\frac{x-8}{x-5} \leq 0$.

3. ☞ Egy számról tudjuk, hogy osztható 9-cel és osztható 11-gyel. Igaz-e?

- a) Ez a szám osztható 99-cel.
 b) Ez a szám osztható 9-cel vagy osztható 11-gyel.

4. ☞ Megadunk két állítást.

A: Minden 5-re végződő pozitív egész szám osztható 5-tel.

B: Minden 5-re végződő pozitív egész szám osztható 3-mal.

Mi az igazságértéke a $\neg A$; $\neg B$; $A \vee B$; $A \wedge B$; $\neg(A \vee B)$ állításoknak?

5. ☞ Szemléltesd halmazábrával a következő nyitott mondatok igazsághalmazát! Az alaphalmaz a 10-nél nagyobb, 25-nél kisebb egész számok halmaza.

Az A, B és C halmaz a következő:

A: „ n osztható 3-mal” nyitott mondat igazsághalmaza.

B: „ n osztható 4-gyel” nyitott mondat igazsághalmaza.

C: „ n osztható 5-tel” nyitott mondat igazsághalmaza.

Fogalmaz meg olyan nyitott mondatot, melynek igazsághalmaza: $A \cap B$; $B \cup C$; $A \cup C$.

TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

1. ☞ Döntsd el, melyik állítás az alábbiak közül!

- a) A kutya nem emlősállat.
- b) Milyen nap van ma?
- c) Arany János írt balladákat.
- d) Minden lány csinos.
- e) A Merkúr a Naphoz legközelebbi bolygó.
- f) Olimpiai sport a tenisz?
- g) A 2 racionális szám.

2. ☞ Állapítsd meg a következő állítások igazságértékét:

A: Három pozitív szám szorzata pozitív.

B: Három pozitív szám szorzata nem negatív.

C: Három egész szám szorzata pozitív.

3. ☞ Gyula így emlékezik: Kulcsár Győző négy olimpián is szerepelt; az egyikén két aranyérmet nyert. Melyik két állítást kapcsolta itt össze egy logikai művelettel Gyula?

Ez a VAGY-művelet vagy az ÉS-művelet?

4. ☞ Egy teljesen hétköznapi mondatban akár több logikai művelet is „megbújhat”. Nézzük például ezt az egyszerű kijelentő mondatot: *Gedő György az 1972-es olimpián dobogós helyezést ért el ökölvívásban.*

Fogalmazd át a következő séma szerint a mondatot (ha kell, tegyél zárójelet az egyes részek elkülönítésére):

Gedő György elindult az 1972. évi olimpián ... ökölvívásban versenyzett ... 1. helyezést ért el ... 2. helyezést ért el ... 3. helyezést ért el.

(Mivel csak egy súlycsoportban indulhatott versenyzőként, két érmet nem nyerhet olimpián ökölvívásban.)

5. ☞ Két állítást fogalmaztunk meg.

A: 320 osztható 40-nel.

B: 320 osztható 50-nel.

Állapítsd meg az $A \wedge B$; $A \vee B$ állítások igazságértékét!

6. ☞ Állapítsd meg az alábbi állítások igazságértékét:

- a) Egy szorzat negatív, ha van negatív szorzótényezője.
- b) Két különböző valós szám négyzetösszege pozitív.
- c) Egy konvex ötszögnek négy átlója van.
- d) A 2 prímszám vagy a 7 páros szám.
- e) A 2 prímszám és a 8 páros szám.

f) A 6 nem páros vagy a 7 nem páros szám.

g) A 36-nak páros számú osztója van és a háromszög belső szögeinek összege 180° .

7. ☞ Tagadjuk az alábbi állításokat!

- a) Minden kutya ugat.
- b) A 7 páratlan szám.
- c) Van örökzöld növény.
- d) Minden sokszögnek van átlója.
- e) A 2 prímszám és a 7 összetett szám.
- f) A 6 páros vagy a 7 páratlan szám.
- g) Bármely valós szám abszolútértéke pozitív.

8. ☞ Aladár, Béla, Cecil és Dezső úszásban versenyeztek egymás között. Eredményeikről, melyek között nem alakult ki holtverseny, ezt mondták:

Aladár: Sem első, sem utolsó nem lettem.

Béla: Nem én lettem az első.

Cecil: Én győztem

Dezső: Utolsó lettem.

Tudjuk azt, hogy a kijelentések közül pontosan egy hamis. Mi a verseny eredményének a sorrendje?

9. ☞ Aladár, Béla, Cecil és Dezső a következő kijelentéseket teszi:

Aladár: „Béla a bűnös.”

Béla: „Aladár hazudik.”

Cecil: „Én nem vagyok bűnös.”

Dezső: „Béla füllent.”

a) Ki a bűnös, ha pontosan egy állítás igaz?

b) Ki a bűnös, ha pontosan egy állítás hamis?

10. ☞ Állapítsuk meg az alábbi kijelentések igazságértékét, majd fordítsuk meg a kijelentéseket, s határozzuk meg az így kapott kijelentések igazságértékét is!

- a) Ha egy szám páros, akkor osztható négygyel.
- b) A négyzet átlói merőlegesek egymásra.
- c) Ha hat valós szám szorzata pozitív, akkor a tényezők között páros darab negatív előjelű szám van.
- d) Ha egy tört számlálója nagyobb, mint a nevezője, akkor a tört értéke nagyobb, mint egy.
- e) Ha a kör sugarát kétszeresére növeljük, akkor a területe négyeszeresére növekszik.
- f) A háromszög külső szögeinek összege 360° .

BEVEZETŐ

A hétköznapi életben sokszor használjuk az „**átlag**”, „**átlagosan**” szavakat. Ha Vali azt mondja, hogy a múlt évben átlagosan havi 145 ezer Ft volt a nettó jövedelme, akkor arra gondolunk, hogy $12 \cdot 145 = 1740$ ezer (1 millió 740 ezer) forint volt az év során kapott nettó jövedelmeinek összege.

Arról semmit sem tudtunk meg, hogy valójában mekkora nettó összegeket kapott Vali havonta. Lehet, hogy minden hónapban 145 ezer forintot, de az is lehet, hogy 5 hónapon keresztül havi 103 ezer forintot, majd 7 hónapon keresztül

havi 175 ezer forintot. Sőt, az is lehet, hogy 11 hónapon keresztül egyetlen fillér nettó jövedelme sem volt, de volt egy hónap, amelyben éppen 1 millió 740 ezer forint nettó jövedelmet ért el.

Sokféleképpen alakulhatott az egyes hónapok nettó jövedelme úgy, hogy végül a havi átlag 145 ezer Ft legyen. Mindegyik esetben igaz azonban, hogy ha a havi nettó jövedelmeket összeadjuk, majd az összeget elosztjuk 12-vel, akkor a hányados 145 ezer lesz.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Annának januárban 150 ezer, februárban 164 ezer, márciusban 154 ezer forint volt a nettó jövedelme. Bertának minden hónapban ugyanannyi volt a nettó jövedelme, az első negyedéves összjövedelme megegyezett Annáéval.

a) Mennyi volt az első negyedévben Anna összjövedelme?

b) Mekkora volt Berta havi nettó jövedelme?

Megoldás

a) Anna első negyedévi összjövedelme

$$150 + 164 + 154 = 468 \text{ ezer forint volt.}$$

b) Berta havi nettó jövedelme

$$\frac{150 + 164 + 154}{3} = \frac{468}{3} = 156$$

ezer forint volt, ami Anna első negyedévi havi átlagjövedelmével egyenlő.

Megjegyzés

A $\frac{150 + 164 + 154}{3}$ hányados a 150, a 164 és a 154 **átlaga**, más szóval **számtani közepe**.

FELADAT

1. 📡 Elveszett egy adat. Mennyi az ismeretlen szám, ha tudjuk, hogy a számok átlaga 32?

a) 28; ...

b) 28; ... ; 32

c) 28; 38; ... ; 40?

2. 📡 Mennyi az osztályzatok átlaga?

A táblázat azt mutatja néhány tanuló esetén, hogy hány darab van neki az egyes osztályzatokból, és mennyi az osztályzatok átlaga. Egészítsd ki a hiányzó adatokat! A füzetedben dolgozz!

Ötösök száma	Négyesek száma	Hármasok száma	Kettesek száma	Egyesek száma	Jegyek átlaga
4	3	5	1	1	$\frac{4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{14} \approx 3,57$
5	5	2	0	0	
4	4	3		1	$\approx 3,833$
5		3	2	1	$= 3,6875$

3. Anna az első negyedévben átlagosan havi nettó jövedelme 156 ezer forintért el, aztán hat hónapig átlagosan havi 158 ezer forintot keresett. Az utolsó negyedévben havi átlagban 174 ezer forint jövedelme volt.

- Mekkora volt Anna éves nettó jövedelme?
- Csilla minden hónapban ugyanannyit keresett. Egy év alatt ugyanakkora lett a nettó jövedelme, mint Annának. Mennyi pénzt kapott havonta Csilla?
- Dóri havi nettó átlagbére tavaly a 156 ezer, a 158 ezer és a 174 ezer számtani közepe volt (forintban kifejezve). Többet, kevesebbet, vagy ugyanannyit keresett egy év alatt, mint Anna?
- Elvira havi nettó átlagkeresete 10 ezer forinttal kevesebb volt, mint Annáé. Hány forinttal volt kevesebb Elvira éves nettó összjövedelme, mint Annáé?

4. Egy gyógyszer elkészítéséhez az egyik összetevőből pontosan 24 grammra van szükség. Az előre csomagolt anyagot analitikai mérlegen tízszer megméri, és kiszámítják a kapott tíz tömeg átlagát. Ha ez az átlag 0,5%-nál többel tér el a szükséges mennyiségtől, akkor nem fogadható el az előre csomagolt anyag. A táblázat tartalmazza a mérések eredményét.

Mért tömeg (gramm)	Gyakoriság
23,78	4
24,09	2
24,31	3
24,50	1

- Mennyi a tíz mérésből kiszámítható átlagos tömeg? (Számolj **súlyozott számtani középpel**!)
- Elfogadható-e az előre csomagolt anyag?

HÁZI FELADAT

- Mennyi az n értéke, ha
 - a 100; 101; 103; n számok átlaga 102;
 - a 100; 101; 103; n számok átlaga 103;
 - az 1000; 1002; 1003; n ; $n + 2$ számok átlaga 1002?
- Anna fizetése 5 hónapon át 160 ezer Ft volt, majd a következő hónapban 15%-kal megemelték, s ez maradt az év végéig. Mennyi volt az átlagfizetése?
- Egy mérési feladat eredményeit tartalmazza a táblázat. (A füzetedben dolgozz!)

mérési eredmény (mm)	gyakoriság	eredmény eltérése az átlagtól
23,4	1	
23,6	4	
23,7	10	
23,8	11	
23,9	12	
30,0	8	
30,2	1	

Mennyi a mérési eredmények átlaga?

A táblázat utolsó oszlopába írd be, hogy az a mérési eredmény mennyivel tér el az átlagtól! (Két tizedesjegy pontossággal dolgozz!) Mennyi ezen eltérések átlaga?

RÁADÁS

A statisztikai adatszolgáltatás kötelező a munkaadók számára. Egy rendeletből való a következő részlet.

...Az átlagos létszám számítása:

a munkavállalók folyamatosan vezetett létszámnylvántartása alapján számított mutató. Az átlagolást havonta kell elvégezni az adott hónap naptári napjainak figyelembevételével. A naponkénti állományi létszámok összegét

– a munkarend szerinti pihenőnapokra és ünnepnapokra az azt megelőző munkanap létszámát véve figyelembe – el kell osztani a hónap napjainak számával. ...

A táblázat megadja egy cég dolgozóinak számát a munkanapokon. A rendelet szövege alapján számítsd ki a februári átlagos állományi létszámot!

1	Sze	38
2	Cs	37
3	P	35
6	H	36
7	K	40
8	Sze	40
9	Cs	39
10	P	38
13	H	40
14	K	40
15	Sze	41
16	Cs	41
17	P	37
20	H	39
21	K	40
22	Sze	39
23	Cs	39
24	P	39
27	H	37
28	K	37

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Januárban Antal és Benő is 150 ezer forint nettó bért kapott, márciusban pedig mindketten 216 ezer forintot. Antal bére februárban és márciusban is ugyanannyival növekedett, Benő bére pedig mindkét hónapban ugyanannyiszorosára nőtt. Melyikük kapott több bért februárban?

Megoldás

Antal februári bére *annyival* több a januári bérénel, *amennyivel* a márciusi bére több a februárinál. Ha tehát a februári bére x Ft, akkor $x - 150 = 216 - x$. Ebből $2x = 150 + 216$, vagyis Antal februári bére $x = \frac{150 + 216}{2} = 183$ ezer forint.

Ez éppen a januári és a márciusi bérének a **számtani közepe**.

Benő februári bére *annyiszorosa* a januári bérének, *ahány-szorosa* a márciusi bére a februárinak. Ha a februári bére y Ft, akkor $\frac{y}{150} = \frac{216}{y}$. Ebből $y^2 = 150 \cdot 216$, vagyis $y = \sqrt{150 \cdot 216} = 180$ ezer forint.

Antal több bért kapott februárban, mint Benő.

Megjegyzés

A $\sqrt{150 \cdot 216} = 180$ számot a 150 és a 216 *mértani* (geometriai) *közepének* nevezzük. A 150 és a 216 számtani közepe nagyobb, mint a mértani közepük.

2. Egy téglalap két szomszédos oldalának hossza a cm és b cm. Hány cm annak a négyzetnek az oldala, amelynek a téglalapével megegyező
a) a kerülete, b) a területe?

Megoldás

a) Legyen a keresett négyzet oldala x cm. A téglalap kerülete $(2a + 2b)$ cm, a négyzet kerülete $4x$ cm. A kerületek egyenlők: $4x = 2a + 2b$. A négyzet oldala tehát $x = \frac{a + b}{2}$ cm hosszú, azaz a téglalap két szomszédos oldala hosszának **számtani közepe**.

b) Legyen a keresett négyzet oldala y cm. A téglalap területe $(a \cdot b)$ cm², a négyzet területe y^2 cm². A területek egyenlők: $y^2 = a \cdot b$. Melyik pozitív számnak a négyzete az $a \cdot b$? A $\sqrt{a \cdot b}$ -nek. Tehát $y = \sqrt{a \cdot b}$. Eszerint a négyzet oldala $\sqrt{a \cdot b}$ cm hosszúságú.

ELMÉLET

A bevezető példákban három matematikai fogalommal találkoztunk: négyzetgyök, számtani közép, mértani közép.

1. **Definíció:** Ha a pozitív szám vagy 0, akkor **négyzetgyökének** azt a pozitív vagy 0 számot nevezzük, amelynek a négyzete a .

A 0 négyzetgyöke 0, pozitív szám négyzetgyöke pozitív, negatív szám négyzetgyökét nem értelmezzük.

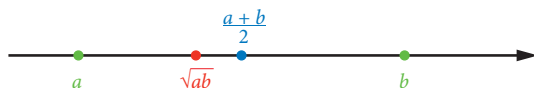
Jelekkel: ha $a \geq 0$, akkor $\sqrt{a}$ létezik, nemnegatív, és $(\sqrt{a})^2 = a$. Ha $a < 0$, akkor a $\sqrt{a}$ nincs értelmezve a valós számok halmazán.

2. **Definíció:** Ha a és b valós szám, akkor az $\frac{a + b}{2}$ számot a és b **számtani közepének**, ha a és b pozitív valós szám, akkor a $\sqrt{a \cdot b}$ számot a és b **mértani** (geometriai) **közepének** nevezzük.

3. **Tétel:** Ha a és b pozitív valós számok, akkor számtani közepük nagyobb vagy egyenlő, mint mértani közepük. Számtani és mértani közepük akkor és csak akkor egyenlő, ha $a = b$.

Ezek szerint:

- Ha $a = b$, akkor a és b számtani és mértani közepe egyenlő $\left(\frac{a+b}{2} = a\right.$ és $\sqrt{a \cdot a} = a$). Az állítás megfordítása is igaz: ha két pozitív szám számtani és mértani közepe egyenlő, akkor maguk a számok is egyenlők.
- Ha $a \neq b$, akkor a és b számtani közepe nagyobb, mint a mértani közepük: $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$. Az állítás megfordítása is igaz: ha két pozitív szám számtani közepe nagyobb a mértani közepükénél, akkor a két szám nem egyenlő.



Például

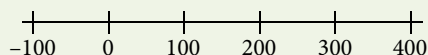
a 8 és a 98 számtani közepe: $(8 + 98) : 2 = 106 : 2 = 53$, a mértani közepük: $\sqrt{8 \cdot 98} = \sqrt{784} = 28$.

Látjuk, hogy a számtani közép nagyobb a mértani közepénél: $53 > 28$.

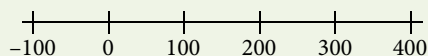
FELADAT

1. Határozd meg ki a következő számok számtani és mértani közepét! Ábrázold számegyenesen a számokat és a hozzájuk tartozó középértékeket!

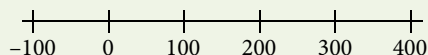
a) 100; 400



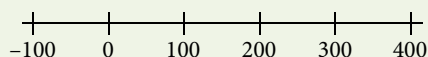
b) 121; 361



c) 169; 225



d) 200; 200



2. Keressünk egy olyan számot, amelyet ha az 5400 és a 24 helyébe írunk, akkor

- a) az $5400 + 24$ összeg nem változik meg;
- b) az $5400 \cdot 24$ szorzat nem változik meg!

3. Egy téglalap két szomszédos oldalának hossza 27 cm és 12 cm.

- a) Egy négyzet kerülete ugyanakkora, mint az adott téglalapé. Mekkora ennek a négyzetnek az oldalai?

- b) Egy négyzet területe ugyanakkora, mint az adott téglalapé. Mekkora ennek a négyzetnek az oldalai?

- c) Az a) és a b) feladatban kapott két négyzet közül melyiknek nagyobb a területe?

4. Jociéknak téglalap alakú udvaruk van, amelynek nem egyenlő hosszúak az oldalai, Dönciéknek pedig négyzet alakú az udvaruk. Mindkét udvar területe ugyanakkora: 144 m^2 . Melyik udvarnak nagyobb a kerülete?

5. 10 millió Ft-os tőkénk az első évben 1,21-szorosára nőtt, a második évben a megnövekedett érték tovább nőtt az 1,69-szorosára.

- a) Hány forint lett a második év végére a tőke?
- b) Hány forinttal nőtt a tőke az első évben és hány forinttal a második évben?
- c) Átlagosan hány forinttal nőtt évenként a tőkénk?
- d) Egy másik esetben a 10 millió Ft-os tőkénk x -szeresére nőtt az első évben, majd a megnövekedett érték is x -szeresére nőtt a következő évben. A második év végére azonban ugyanannyi pénzünk lett, mint az eredeti feladatban. Hányszoros volt az éves növekedés? Mennyi volt forintban kifejezve az első éves és a második éves növekedés?

HÁZI FELADAT

1 Januárban Vígh úr üzletében és Bíró úr üzletében is 25 000 Ft volt a télikabát, márciusban mindkét üzletben 16 000 Ft. Bíró úr februárban és márciusban is ugyanannyival csökkentette a kabát árát, Vígh úr pedig februárban ugyannyi százalékkal csökkentette a januári árat, mint ahány százalékkal márciusban a februárit.

Melyikük üzletében volt olcsóbb a kabát februárban?

- 2 a)** Melyik eset a kedvezőbb: ha két hónapban egymás után kétszer 5%-os nettó bérnövekedést érünk el, vagy ha az első hónapban 8%-os, a második hónapban újabb 2%-os nettó bérnövekedést?
- b)** Két egymást követő évben ugyanannyi százalékos béremelést értünk el. Így ugyanannyival

nőtt a bérünk, mintha az első évben 10%-kal csökkent, a második évben pedig 60%-kal nőtt volna. Hány százalékos béremelést értünk el?

- 3** Készítsd el a füzetedben és töltsd ki a táblázatot pozitív egész számokkal!

a	b	a és b számtani közepe	a és b mértani közepe
96	150		
375			225
	8	68	
50			50
		10	6
		109	60

RÁADÁS

Honnan ered a számtani közép és a mértani közép elnevezés?

Valaha régen két szám különbségére azt mondták, ez a számok *számtani aránya*.

Két szám hányadosára azt mondták, ez a számok *mértani aránya*.

Például a 9 és a 6 számtani aránya $9 - 6 = 3$, a mértani arányuk pedig $9 : 6 = 1,5$ volt.

Ha két számtani arány egyenlő volt, akkor = jellel is felírták őket, így kaptak egy *számtani aránypárt*.

Például $9 - 6 = 35 - 32$, ez egy számtani aránypár.

Itt a két középső szám (a két belső tag) összege éppen annyi, mint a két szélső szám (a két külső tag) összege.

Ha két mértani arány egyenlő volt, akkor = jellel is felírták őket, így kaptak egy *mértani aránypárt*.

Például $9 : 6 = 21 : 14$, ez egy mértani aránypár.

Itt a két középső szám (a két belső tag) szorzata éppen annyi, mint a két szélső szám (a két külső tag) szorzata.

Különösen érdekesnek találták akkoriban azokat a számtani és mértani aránypárokat, amelyeknél ugyanaz a szám állt az egyenlőségjel mellett a két oldalon, vagyis a két belső tag egyenlő volt.

Például ilyen a $9 - 6 = 6 - 3$ számtani aránypár.

Itt a 6-ot a 9 és a 3 *számtani középárányosának* nevezték.

Például ilyen a $9 : 6 = 6 : 4$ mértani aránypár.

Itt a 6-ot a 9 és a 4 *mértani középárányosának* nevezték.

Ebben az időben a fogalmakat csak pozitív számokra vonatkozóan alkották meg. (Azonban ezek a közepek bővebb számkörben is értelmezhetők.)

Ha a két egyenlő belső tagot x -szel, a két külső tagot pedig a -val és b -vel jelölték, akkor

az $a - x = x - b$ számtani aránypárban az x számra mondták, hogy ez az a és b *számtani középárányosa*.

Az $a - x = x - b$ egyenletből: $x = \frac{a+b}{2}$.

az $a : x = x : b$ mértani aránypárban az x számra mondták, hogy ez az a és b *mértani középárányosa*.

Az $a : x = x : b$ egyenletből: $x = \sqrt{ab}$.

A régi elnevezések vége lekopott, így maradt meg a *számtani közép* és a *mértani közép* elnevezés.

Hogy honnan ered a nevük, azt mostanáig már csak néhány nagyon öreg ember tudta, de ezentúl már te is tudni fogod!

EMELT SZINT

1. Bizonyítsuk be a tételt!

Tétel: Két pozitív szám számtani közepe nagyobb vagy egyenlő, mint a mértani közepük. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$; $(a, b \in \mathbb{R}^+)$

Bizonyítás

Ha a és b pozitív valós szám, akkor a számtani közepük is pozitív és a mértani közepük is pozitív. Tudjuk továbbá, hogy két pozitív szám közül az a nagyobb, amelynek a négyzete nagyobb.

Azt állítjuk tehát, hogy a és b számtani közepének négyzete nagyobb vagy egyenlő a mértani közepük négyzeténél, vagyis $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq (\sqrt{ab})^2$.

E helyett az egyenlőtlenség helyett egyszerűbb, vele ekvivalens egyenlőtlenségeket keresünk:

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \geq ab; \quad a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab; \quad a^2 - 2ab + b^2 \geq 0; \quad (a - b)^2 \geq 0.$$

Az utoljára kapott egyenlőtlenség igaz, mert minden valós szám négyzete nemnegatív szám, ezért igaz a vele ekvivalens eredeti állítás is.

Ezzel beláttuk, hogy az összehasonlított két pozitív szám közül a számtani közép négyzete nagyobb vagy egyenlő a mértani közép négyzeténél. Ezért maguk között a számok között is ez a nagyságviszony áll fenn. Az utolsó alak azt is megmutatja, hogy itt egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $a = b$.

FELADAT

1. Bizonyítsuk be, hogy ha a pozitív valós szám, akkor $a + \frac{1}{a} \geq 2$!

Megoldás

Az a és az $\frac{1}{a}$ számtani közepe: $\frac{a + \frac{1}{a}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right)$, a mértani közepe pedig $\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1$.

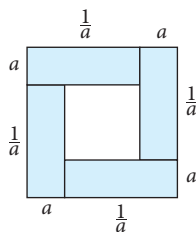
Az előbbieken bebizonyítottuk, hogy a számtani közép nem kisebb a mértani középénél, vagyis $\frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 1$, és ebből 2-vel szorozva megkapjuk a bizonyítandó állítást: $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

Itt egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a = \frac{1}{a}$, vagyis ha $a = 1$.

Megjegyzés

- Ha egy **pozitív** szám nem egyenlő 1-gyel, akkor e számnak és a reciprokának az összege nagyobb, mint 2.
- Fentiekből – például (-1) -gyel való szorzás útján – az is következik, hogy ha egy **negatív** szám nem a (-1) , akkor e számnak és a reciprokának az összege kisebb (-2) -nél.

2. Olvasd le erről a rajzról, hogy ha a pozitív valós szám, akkor $a + \frac{1}{a} \geq 2$!



3. Legfeljebb mekkora lehet annak a téglalap alakú teleknek a területe, amelyet 52 m hosszú kerítéssel tudunk körbekeríteni?

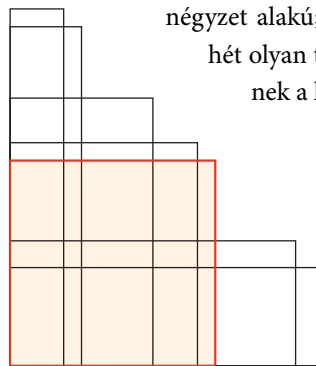
Megoldás

Legyen a telek két szomszédos oldalának hossza a méter, illetve b méter. Ekkor $2a + 2b = 52$, vagyis $a + b = 26$, $\frac{a+b}{2} = 13$. Tudjuk azt is, hogy a telek területe ab négyzetméter.

Mivel $169 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$, ezért a telek területe nem lehet nagyobb 169 m^2 -nél.

Ha $a = b = 13$, vagyis négyzet alakú a telek, akkor a területe éppen 169 m^2 .

Tehát az 52 méter hosszú kerítéssel legfeljebb 169 m^2 területű, téglalap alakú telek keríthető körbe (a telek ekkor négyzet alakú; lásd az ábrát is). [Az ábrán hét olyan téglalap (is) látható, amelyeknek a kerülete egyenlő.]

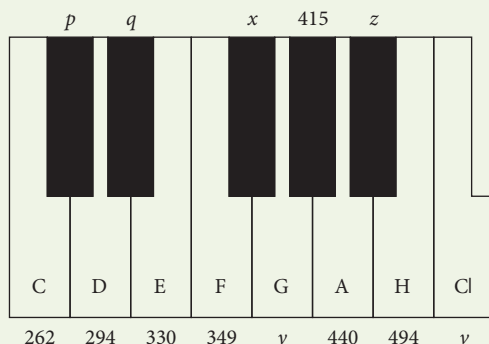


4. Legalább mekkora annak a téglalap alakú teleknek a kerülete, amelynek területe 100 m^2 ?

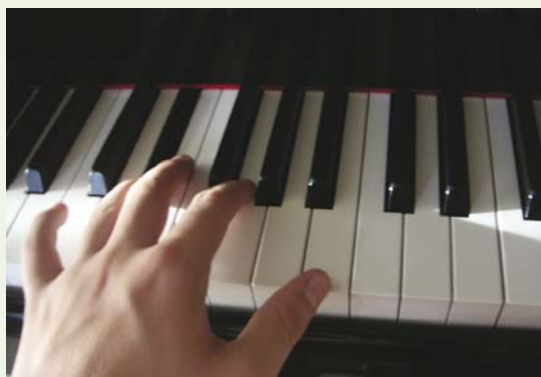
8 VÁLTOZÁSOK

FELADAT

1. A zongora fehér billentyűinek szokásos elnevezése az ábrán látható. Egy fekete billentyű leütésekor megszólaló hang frekvenciája a szomszédos két fe-



hér billentyű „frekvenciájának” mértani közepe. Ha egy fehér és egy fekete billentyű fog közre egy fehér billentyűt (pl. E, F vagy H), akkor az ehhez tartozó frekvencia a két közrefogó billentyű „frekvenciájának” mértani közepe. (A frekvenciát hertzben mérjük. Például a fenti ábrán megadott A hang frekvenciája 440 Hz.)



- Számítsd ki az ismeretlen frekvenciákat!
- Hányszorosa a C hang frekvenciájának az egy oktávval magasabban megszólaló C' hang frekvenciája?
- A C hangtól elindulva sorra leütjük mindegyik billentyűt. Mit mondhatunk az egymás után megszólaló hangok frekvenciájának arányáról (az arányokat századra kerekítve)?

2. 10 millió Ft-os tőkénk az első évben 1,5 millió Ft-tal, a második évben 3,5 millió Ft-tal nőtt. Mennyi volt a tőke évenkénti átlagos növekedése?

3. Egy kerékpártúrán az első napon 62 km-t tettek meg. A második napon 15%-kal többet, mint az első napon. A harmadik napon 15%-kal kevesebbet, mint a második napon. A negyedik napon 14 km-rel többet, mint a harmadik napon. Az ötödik napon 14 km-rel kevesebbet, mint a negyedik napon.

a) Töltsd ki a táblázatot a füzetedben!

1. nap	2. nap	3. nap	4. nap	5. nap	összesen
62 km					

- A második napon 15%-kal növelték, majd a következőn 15%-kal csökkentették a távot. Több vagy kevesebb a napi táv a harmadik napon, mint az elsőn? Miért?
 - A negyedik napon 14 km-rel növelték, majd az ötödik napon 14 km-rel csökkentették a napi távot. Több vagy kevesebb a napi táv az ötödik napon, mint a harmadikon? Miért?
 - Mennyit tekertek átlagosan egy nap alatt?
4. Egy baromfitelepen 10 000 csirke volt. Számuk egy év alatt 1,22-szorosára nőtt, a következő évben az előző évhez viszonyítva csak 1,01-szorosára.
- Hány csirke lett 2 év után ezen a telepen?
 - Mennyi az éves átlagos szaporulat?
 - Hány csirke lenne 2 év után a telepen, ha mindkét évben $\sqrt{1,22 \cdot 1,01}$ -szoros lett volna a növekedés?



- d) Hány százalékos éves növekedésnek felel meg a $\sqrt{1,22 \cdot 1,01}$ -szoros növekedés? Több, kevesebb vagy ugyanannyi ez, mint a 22% és az 1% számtani közepe (átlaga)?

5 Egy új autó vételára 4,2 millió forint. Az első évben 20%-kal, a második évben újabb 15%-kal csökken az autó értéke.

- a) Mennyit ér az autó a megvásárlása után egy, illetve két évvel?

- b) Hány százalékot veszített eredeti értékéből (vételárából) két év alatt az autó?

c) A 20% és a 15% számtani közepe 17,5%. Ha mindkét évben 17,5%-ot veszített volna az autó az előző évi értékéből, akkor mennyi lenne két év után az értéke?

- d) 4,2 millió forintért vásárolt céges autó értékét évente ugyanannyi százalékkal csökkentették az előző évi értékéhez viszonyítva. A vétel után 2 évvel az autó nyilvántartási értéke 2,856 millió forint. Hány százalékos volt az éves értékcsökkenés?

HÁZI FELADAT

1 Egy ország 5 milliós népessége 1900-tól 1950-ig 21%-kal nőtt, majd 2000-ig újabb 44%-kal.

- a) Mennyi lett 2000-ben a népesség?
b) Átlagosan hány fővel nőtt 50 évente ebben a 100 évben az ország népessége?
c) Ha 50 évente mindig ugyanannyi százalékos növekedve érte volna el az ország lakossága a 2000. évi népességszámot, akkor hány lakosa lett volna az országnak 1950-ben?

2 A háromnapos, adott távolságú kerékpártúra második és harmadik napján is 10 km-rel többet tettünk meg, mint az előző napon.

- a) Hány km-rel tettünk meg többet a harmadik napon, mint az első napon?
b) Ha a második és a harmadik napon ugyanannyi km-t tettünk volna meg, akkor ez napi hány km-rel lenne több, mint az első napon megtett táv?

3 Egy kerékpártúra első napján az A csapat és a B csapat is 50 km-t tett meg; az A csapat a túra második napján 1,44-szer akkora távolságot, mint az első napon, a harmadik napon pedig 1,21-szer akkora távolságot, mint a második napon.

- a) Hányszor akkora távolságot tett meg az A csapat a harmadik napon, mint az elsőn?
b) A B csapat a második és a harmadik napon is ugyanannyiszorosára növelte az előző napi távolságot, így a harmadik napon a B csapat ugyanakkora távot tett meg, mint az A csapat.

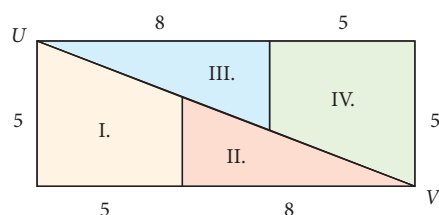
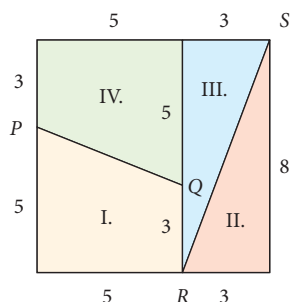
Hányszorosára növelte a napi távolságot a B csapat?

- c) Hány km-t tett meg a három nap alatt az A, illetve a B csapat?
d) Hány km a napi átlagosan megtett távolság az A, illetve B csapat esetében az első három napra számítva?



BEVEZETŐ

Régről ismert egy hamis bizonyítás arra, hogy $64 = 65$.



A 8 egység oldalú négyzetet az ábra szerint vágjuk négy síkidomra! Ezekből rakjuk ki az alsó ábra szerinti téglalapot! Mivel a két síkidom ugyanazokból a részekből áll, területük egyenlő: $8 \cdot 8 = 5 \cdot 13$, azaz $64 = 65$.

Hol a hiba?

Tényleg **hézag nélkül** tölti ki a négy síkidom az 5×13 -as téglalapot? Vajon egy egyenesbe esik a téglalapban az I. trapéz szára és a II. háromszög átfogója? Hasonlítsuk össze a téglalap UV átlóját a PQ és RS szakaszok összegével!

Pitagorasz-tétellel: $UV = \sqrt{5^2 + 13^2} = \sqrt{194} \approx 13,93$ és

$PQ + RS = \sqrt{5^2 + 2^2} + \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{29} + \sqrt{73} \approx 13,93$

Két szám egyenlőségéhez nem elég azonban csak a közelítő értékeiket vizsgálni. Azt tudjuk, hogy mindkét szám pozitív, hasonlítsuk össze a négyzetüket!

$$(\sqrt{29} + \sqrt{73})^2 = 29 + 2 \cdot \sqrt{29} \cdot \sqrt{73} + 73 = 102 + 2 \cdot \sqrt{29} \cdot \sqrt{73}$$

$$(\sqrt{194})^2 = 194 = 102 + 2 \cdot 46$$

Melyik nagyobb: $\sqrt{29} \cdot \sqrt{73}$ vagy 46? Hasonlítsuk össze a négyzetüket!

$$(\sqrt{29} \cdot \sqrt{73})^2 = 29 \cdot 73 = 2117, \text{ de } 46^2 = 2116.$$

Azt kaptuk, hogy $PQ + RS > UV$, vagyis az I. és II. részek (és ugyanígy a III. és IV. részek) összeillesztése után nem háromszöget kapunk, hanem egy konkáv négyszöget! A négy síkidom nem hézagmentesen tölti ki a téglalapot.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Írjuk fel egyszerűbben és pontosan a $\sqrt{18} \cdot \sqrt{8}$ és a $\sqrt{18} : \sqrt{8}$ számot!

Megoldás

Kiszámítjuk a számok négyzetét:

$$(\sqrt{18} \cdot \sqrt{8})^2 = (\sqrt{18})^2 \cdot (\sqrt{8})^2 = 18 \cdot 8 = 144$$

Melyik pozitív szám négyzete a 144? A 12-é!

$$\text{Tehát } \sqrt{18} \cdot \sqrt{8} = 12.$$

$$(\sqrt{18} : \sqrt{8})^2 = (\sqrt{18})^2 : (\sqrt{8})^2 = 18 : 8 = 2,25$$

Melyik pozitív szám négyzete a 2,25? Az 1,5-é!

$$\text{Tehát } \sqrt{18} : \sqrt{8} = 1,5.$$

Ha megfigyeljük, milyen lépéseket végeztünk a számítás során, azt tapasztaljuk, hogy

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{18 \cdot 8}.$$

$$\sqrt{18} : \sqrt{8} = \sqrt{18 : 8} \text{ vagy másképp: } \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{18}{8}}.$$

ELMÉLET

A pozitív számok négyzetgyökeivel való számolásban segítenek a következő azonosságok:

Ha a és b pozitív szám, az n pedig pozitív egész szám, akkor

$$1. \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}; \quad 2. \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}; \quad 3. (\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}.$$

Például

$$\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4;$$

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2;$$

$$(\sqrt{5})^4 = \sqrt{5^4} = 5^2 = 25.$$

FELADAT

1. Számológép használata nélkül válaszolj! Mennyi

a) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{8}$ és a $\sqrt{50} : \sqrt{8}$;

b) $\sqrt{72} \cdot \sqrt{8}$ és a $\sqrt{72} : \sqrt{8}$;

c) $\sqrt{72} \cdot \sqrt{50}$ és a $\sqrt{72} : \sqrt{50}$?

2. Az előző feladat eredményei közül melyiket adja meg pontosan a zsebszámológéped?

3. Igazold, hogy

a) $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$; d) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{98}} = \sqrt{\frac{8}{98}} = \frac{2}{7}$;

b) $\sqrt{8} : \sqrt{2} = 2$; e) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{54}{6}} = 3$!

c) $\frac{7}{\sqrt{7}} = \sqrt{7}$;

4. Melyik szám négyzetgyökeként írható fel a szorzat? Hogyan lehet „bevenni a gyökjel alá” a szorzótényezőt?

Figyeld meg: $3 \cdot \sqrt{10} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{9 \cdot 10} = \sqrt{90}$

a) $2 \cdot \sqrt{7} = \sqrt{\dots}$

b) $5 \cdot \sqrt{6} = \sqrt{\dots}$

c) $10 \cdot \sqrt{19} = \sqrt{\dots}$

d) $12 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{\dots}$

5. Figyeld meg: $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5 \cdot \sqrt{3}$. A példa alapján írd fel szorzatként a következő számokat:

$\sqrt{12}$; $\sqrt{20}$; $\sqrt{300}$; $\sqrt{45}$; $\sqrt{25a}$ ($a \geq 0$).

6. Vond össze a tagokat! ($a \geq 0$)

a) $\sqrt{a} + \sqrt{4a}$

b) $\sqrt{2} + \sqrt{50} - \sqrt{18}$

7. Végezd el a négyzetre emelést! (ismétlésképpen: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$)

a) $(\sqrt{5} + \sqrt{7})^2$

b) $(\sqrt{13} + \sqrt{11})^2$

8. Közelítő értékek használata nélkül határozd meg, melyik szám a nagyobb!

a) $\sqrt{34} + \sqrt{18}$ vagy $\sqrt{102}$

b) $\sqrt{46} + \sqrt{51}$ vagy $\sqrt{195}$

HÁZI FELADAT

1. Egy téglalap egyik oldalának hossza $\sqrt{6}$. Mekkora a másik oldal hossza, ha a téglalap területe

a) $\sqrt{24}$; c) $\sqrt{0,06}$;

b) $\sqrt{150}$; d) $\sqrt{6^3}$?

2. Számolj gyorsan, számológép nélkül!

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} =$

b) $\frac{\sqrt{18}}{3} + \frac{2}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} =$

c) $\left(\frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3} - \sqrt{5}) =$

3. Melyik a nagyobb? Ne használj számológépet!

a) $\sqrt{18}$ vagy $\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{7,5}$

b) $\sqrt{7}$ vagy $\frac{\sqrt{23,8}}{\sqrt{3,4}}$

c) $\sqrt{32}$ vagy $(\sqrt{2})^5$

4. Közelítő értékek használata nélkül dönts el, hogy melyik szám a nagyobb!

a) $\sqrt{505}$ vagy $\sqrt{194} + \sqrt{73}$

b) $\sqrt{1325}$ vagy $\sqrt{194} + \sqrt{505}$

FELADAT

1. Egy négyzet területe

- a) 49 cm^2 ; b) 121 cm^2 ; c) 57 cm^2 ; d) $T \text{ cm}^2$.

Mekkora a négyzet oldala?

2. Egy szám négyzete

- a) 49; c) 57;
b) 121; d) T (és $T > 0$).

Melyik lehet ez a szám?

3. Határozd meg zsebszámológép nélkül a következő kifejezések értékét! (Alakítsd át a gyökjel alatt álló kifejezéseket olyan szorzattá, hányadossá, amelyekben a tényezőknek ismered a négyzetgyökét!)

$$\sqrt{3 \cdot 75}; \sqrt{8 \cdot 50}; \sqrt{30 \cdot 6 \cdot 20}; \sqrt{14 \cdot 35 \cdot 10}$$

$$\sqrt{\frac{7 \cdot 18}{14}}; \sqrt{\frac{63 \cdot 8}{14}}; \sqrt{\frac{50 \cdot 300}{6}}$$

4. Határozd meg a négyzetgyök értékét!

$$\sqrt{5^2}; \sqrt{(-5)^2};$$

$$\sqrt{11^2}; \sqrt{(-11)^2};$$

$$\sqrt{a^2}, \text{ ha } a \text{ valós szám.}$$

5. Végezd el a műveleteket! Először számológép használata nélkül add meg a végeredményt, majd ellenőrizd számológéppel is, hogy jól számoltál-e!

a) $(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})$

b) $(\sqrt{7} + 5)(\sqrt{7} - 5)$

c) $(\sqrt{7} + \sqrt{5})^2$

d) $(5 - \sqrt{7})^2$

6. Egyszerűsítsd a törtet $\sqrt{2}$ -vel!

a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ e) $\frac{6}{\sqrt{2}}$

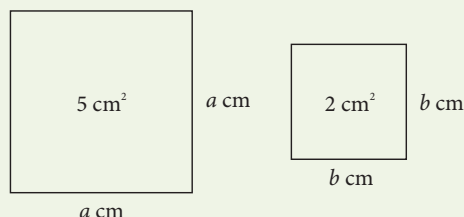
b) $\frac{\sqrt{0,32}}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ f) $\frac{0,4}{\sqrt{2}}$

7. Bővítsd vagy egyszerűsítsd a törtet $\sqrt{5}$ -tel!

a) $\frac{5}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{12}{\sqrt{5}}$ e) $\frac{\sqrt{500}}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{20}{\sqrt{5}}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$ f) $\frac{0,25}{\sqrt{5}}$

8. Az a cm oldalú négyzet területe 5 cm^2 , a b cm oldalú négyzet területe 2 cm^2 .



a) Mekkora a és b ?

b) Mekkora az $a + b$ oldalú négyzet területe?

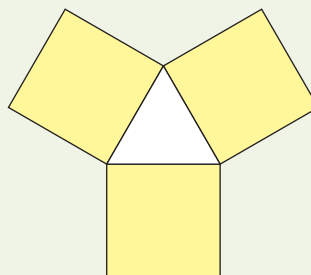
c) Mekkora az $5 + 2 = 7 \text{ (cm}^2\text{)} területű négyzet oldalhosszúságai?$

9. A fehér szabályos háromszög magasságai 6 cm-esek. Hányszor akkora a sárga terület, mint a fehér?

a) Adj becslést!

b) Végezz számításokat számológéppel!

c) Adj pontos eredményt!



HÁZI FELADAT

- 1.** Bővítsd vagy egyszerűsítsd a törtet $\sqrt{3}$ -mal! Ahol lehet, hozd egyszerűbb alakra a kifejezést!

a) $\frac{6}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{27}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}}; \frac{0,6}{\sqrt{3}}$

- 2.** Melyik igaz, melyik hamis? Ha hamis, akkor javítsd úgy, hogy igaz legyen!

a) $\frac{8}{\sqrt{8}} = 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{23^3} \cdot \sqrt{23} = 23^2$

c) $(\sqrt{14} - \sqrt{5})^2 = 9$

d) $(\sqrt{5} + \sqrt{14})(\sqrt{14} - \sqrt{5}) = 9$

- 3.** Végezd el a műveleteket! Adj pontos eredményt!

a) $(\sqrt{11} - \sqrt{8})(\sqrt{11} + \sqrt{8})$

b) $(\sqrt{43} - \sqrt{17})(\sqrt{17} + \sqrt{43})$

c) $(\sqrt{138} + \sqrt{14})(\sqrt{14} - \sqrt{138})$

d) $(\sqrt{33} + 6)(6 - \sqrt{33})$

EMELT SZINT

- 1.** Vizsgáld meg, hogy az alábbi számok közül melyek racionálisak és melyek irracionálisak!

a) $\sqrt{2}, \sqrt{2} + \sqrt{2}, \sqrt{2} - \sqrt{2}, \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{8}, \sqrt{8} + \sqrt{8}, \sqrt{8} - \sqrt{8}, \sqrt{8} \cdot \sqrt{8}, \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}}$

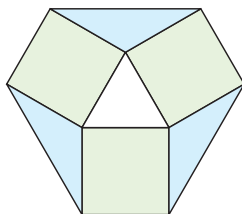
c) $\sqrt{2} + \sqrt{8}, \sqrt{2} - \sqrt{8}, \sqrt{8} - \sqrt{2}, \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}, \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

- 2.** Egy kocka oldaléle 2 cm hosszúak.

- a) Mekkora annak a szabályos háromszögnek a kerülete és a területe, melynek oldalai a kocka lapát-lóival egyenlő hosszúságúak?
- b) Mekkora annak a szabályos háromszögnek a kerülete és a területe, melynek oldalai a kocka test-átlóival egyenlő hosszúságúak?

- 3.** A fehér szabályos háromszög magassága 12 cm.

- a) Hányszor akkora a kék terület, mint a fehér?
- b) Hányszor akkora a zöld terület, mint a kék?



I. Tört nevezőjének gyöktelenítése

Ha a tört nevezőjében négyzetgyökök (is) szerepel, akkor általában nehezebben kezelhető a tört. Egyes esetekben egyszerű módszerrel „megszabadulhatunk” a nevezőben szereplő négyzetgyökös alaktól. Ehhez csupán bővítenünk kell a törtet egy alkalmas számmal.

Például

Hogyan írható az $\frac{5}{\sqrt{6}}$ tört olyan alakban, amelynek a nevezőjében nincs négyzetgyök?

Bővítsük a törtet $\sqrt{6}$ -tal!

$$\frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}. \text{ Mivel } (\sqrt{6})^2 = 6, \text{ ezért } \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{6}.$$

Hogyan írható a $\frac{6}{3 - \sqrt{2}}$ tört olyan alakban, amelynek a nevezőjében nincs négyzetgyök? A nevezőben két szám különbsége áll. Tudjuk, hogy ha ezt megszorozzuk ugyanennek a két számnak az összegével, akkor a két szám négyzetének a különbségét kapjuk meg. Ezért bővítsük a törtet $(3 + \sqrt{2})$ -vel!

$$\begin{aligned} \frac{6}{3 - \sqrt{2}} &= \frac{6 \cdot (3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \frac{6 \cdot (3 + \sqrt{2})}{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \\ &= \frac{6 \cdot (3 + \sqrt{2})}{9 - 2}, \text{ tehát } \frac{6}{3 - \sqrt{2}} = \frac{6 \cdot (3 + \sqrt{2})}{7}. \end{aligned}$$

- 4.** Gyöktelenítsd a törtet!

a) $\frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}; \frac{18}{\sqrt{7} - 3}; \frac{\sqrt{15} + \sqrt{18}}{\sqrt{15} - \sqrt{18}};$

b) $\frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}, x, y > 0$

11 GYAKORLÁS

FELADAT

1. Írd egyszerűbb alakban a következő szorzatokat!

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{125}$ c) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{39}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{27}{4}}$ d) $\sqrt{\frac{5}{63}} \cdot \sqrt{\frac{7}{20}}$

2. Végezd el a következő műveleteket!

a) $(\sqrt{2} + 6\sqrt{50} + 4\sqrt{8}) \cdot \sqrt{2}$

b) $(\sqrt{63} - \sqrt{700} + 5\sqrt{28}) \cdot \sqrt{7}$

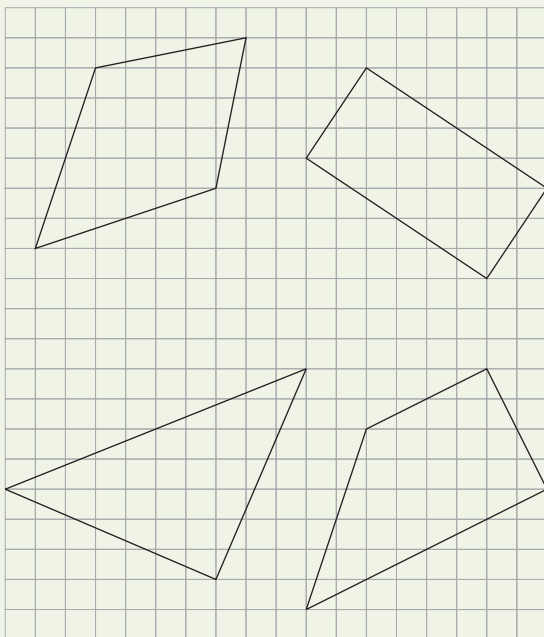
3. Gyökjel alól kihozatal segítségével végezd el a műveleteket!

a) $\sqrt{8} + \sqrt{2} - \sqrt{50}$

b) $5\sqrt{27} - 2\sqrt{48} + \sqrt{75}$

c) $(7\sqrt{20} - \sqrt{5})(5\sqrt{45} - \sqrt{500})$

4. Az ábrán egy téglalap, egy deltoid, egy derékszögű trapéz és egy egyenlő szárú háromszög látható. A négyzetrács egy négyzetének területét egy egységnek tekintve, számítsd ki a megadott síkidomok területének és kerületének pontos értékét! Ne használj számológépet!



5. Egy rombusz átlói $\sqrt{10}$ cm és $\sqrt{40}$ cm.

a) Hányszorosa a hosszabbik átló a rövidebbik átlónak?

b) Mekkora a rombusz területe?

c) Mekkora a rombusz kerülete?
(Pontos értékekkel válaszolj!)

6. Egy szabályos háromszög magassága 9 cm.

a) Milyen hosszúak az oldalai?

b) Mekkora a területe?

c) Készítünk egy nagyobb szabályos háromszöget, melynek a magassága akkora, mint az első háromszög oldala. Mekkora ennek a háromszögnek az oldala és a területe?

7. Lehet-e egy háromszög oldalainak hosszúsága (egységekben megadva) az alábbi három mennyiség? Van-e köztük derékszögű háromszög? A számolás során ne használj közelítő értékeket!

a) $\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; $\sqrt{10}$

b) $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{10}$

c) $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; 3



HÁZI FELADAT

1. Egyszerűsítsd vagy bővítsd, és hozd egyszerűbb alakra a törtet!

$$\frac{40}{\sqrt{10}}; \quad \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}}; \quad \frac{4\sqrt{20}}{\sqrt{10}}; \quad \frac{40 - \sqrt{40}}{\sqrt{10}}; \quad \frac{4 - \sqrt{40}}{\sqrt{10}}$$

2. Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $\sqrt{8} + \sqrt{18}$

b) $\sqrt{45} + \sqrt{5} - \sqrt{20}$

3. Mekkora a derékszögű háromszög területe, ha az egyik befogójának hossza $\sqrt{28}$ cm, átfogójának hossza $3\sqrt{7}$ cm?

4. Egy szabályos háromszög magassága 4 egység. A háromszög minden oldala fölé egy félkört rajzolunk úgy, hogy a félkör átmérője a háromszög oldala, és a félkörök mind kifelé néznek, nincs közös belső pontjuk a háromszöggel.

- a) Szerkeszd meg az ábrát!
b) Mekkora a félkörök sugara? (Adj pontos eredményt!)
c) Mennyi a három félkör területének összege? (Adj pontos eredményt!)
d) Mennyi a három félkör kerületének összege?

RÁADÁS

1. Mennyivel egyenlő a következő kifejezés négyzete?

$$\sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

2. Milyen x valós szám esetén van a kifejezésnek négyzetgyöke? Mennyi a négyzetgyök értéke?

a) x ; $(x-3)$; $-x$; $(3-x)$

b) x^2 ; $-x^2$; $(-x)^2$; $(x-3)^2$

3. Gyöktelenítsd a törtet! $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{10}}$

EMELT SZINT

Bizonyítsuk be a gyökvonás azonosságait!

Igazoljuk, hogy ha a és b pozitív szám, az n pedig pozitív egész szám, akkor

1. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$;

2. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$;

3. $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$!

A bizonyításhoz felhasználjuk, hogy ha két pozitív szám négyzete egyenlő, akkor a számok is egyenlők.

1–2. Ha a és b pozitív, akkor négyzetgyökük is pozitív. Tehát

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} > 0 \quad \text{és} \quad \sqrt{a \cdot b} > 0.$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} > 0 \quad \text{és} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} > 0.$$

Hasonlítsuk össze a vizsgált pozitív számok négyzetét (felhasználva a négyzetgyök definícióját és a hatványozás azonosságait):

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab \quad \text{és} \quad (\sqrt{a \cdot b})^2 = a \cdot b;$$

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b} \quad \text{és} \quad \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}.$$

Vagyis az összehasonlított két pozitív szám négyzete egyenlő, ezért maguk a számok is egyenlők.

3. A négyzetgyök hatványozására vonatkozó tétel az 1. tételből azonnal következik (n -szer vesszük szorzótényezőként $\sqrt{a}$ -t).

TUDÁSPRÓBA I.

1. Egy ellenőrzés során megmérték 20 csomag rizsnek a tömegét. A mérések eredményeit a következő táblázat tartalmazza:

mérési eredmény (g)	981	985	997	998	1001	1002	1007
darabszám	1	2	5	3	3	5	1

Mennyi a mérési eredmények átlaga?

2. Egy cég 10 600 kg terméket gyárt az egyik évben. A második évben 410 kg-mal többet termelnek.
- a) Hány kg terméket kellene gyártani a következő évben, hogy ugyanannyival nőjön a termelés?
- b) Hány kg terméket kellene gyártani a következő évben, hogy ugyanannyiszorosára nőjön a termelés?

3. Vond össze a tagokat, és írd fel szorzat alakban a kifejezéseket!

$$\sqrt{75} + \sqrt{27} - \sqrt{12} + 6\sqrt{3}$$

4. Bővítsd vagy egyszerűsítsd a törtet!

$$\frac{\sqrt{50} - \sqrt{8}}{\sqrt{2}}$$

5. Egy négyzet területe 7 egység, egy másik négyzet területe kétszer ekkora.

- a) Mekkora annak a négyzetnek az oldalhosszúsága, melynek kerülete éppen számtani közepe az első két négyzet kerületének?
- b) Mekkora annak a négyzetnek az oldalhosszúsága, melynek területe éppen mértani közepe az első két négyzet területének?

6. Egy négyzet átlója $\sqrt{10}$ egység.

- a) Mekkora a négyzet kerülete?
- b) Egyenlőszárú háromszöget alkotunk, melynek két szára olyan hosszú, mint a négyzet átlója, és alapja olyan hosszú, mint a négyzet oldala. Mekkora ennek az egyenlőszárú háromszögnek az alaphoz tartozó magassága? (Pontos értékekkel számoldj!)

TUDÁSPRÓBA II.

1. Mennyi az x értéke, ha x és 40

a) számtani közepe 32; b) mértani közepe 32?

2. Egy három napos kerékpártúrán az első napon 42 km-t tettünk meg. A teljes táv 150 km.

a) Úgy döntünk, hogy egyre növeljük a naponta megtett távolságot, mégpedig a második napon ugyanannyival növeljük, mint a harmadik napon. Mennyit kell teljesítenünk a teljes távhoz a második és a harmadik napon?

b) Hány százalékkal növeltük a napi távolságot a második, illetve a harmadik napon?

c) Mekkora távot tudnánk teljesíteni, ha a második és a harmadiknap 16%-kal növelnénk az előző napi távolságot?

3. Vond össze a tagokat, és írd fel szorzat alakban a kifejezéseket!

$$\sqrt{18} + 3\sqrt{50} - 5\sqrt{8} + 6\sqrt{2}$$

4. Bővítsd vagy egyszerűsítsd a törtet!

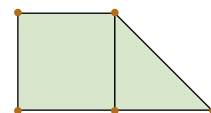
$$\frac{\sqrt{75} - \sqrt{27}}{\sqrt{3}}$$

5. Az ábra szerinti trapézot úgy kaptuk, hogy egy négyzet egyik oldalára egy egyenlőszárú, derékszögű háromszöget illesztettünk, melynek egyik szára egyben a négyzet egyik oldala.

A trapéznek az a szára, ahol nincsen derékszög, $\sqrt{6}$ egység hosszúságú.

a) Mekkora a trapéz kerülete?

b) Mekkora a trapéz területe?



6. Egy téglalap oldalai $\sqrt{3}$ egység és $\sqrt{7}$ egység.

a) Milyen hosszúak az átlói?

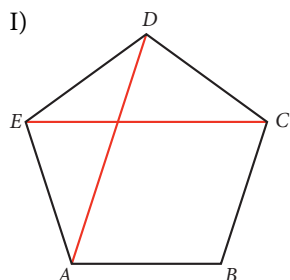
b) Egyenlőszárú háromszöget alkotunk, melynek két szára olyan hosszú, mint a téglalap átlói, alapja pedig olyan hosszú, mint a téglalap rövidebbik oldala. Mekkora ennek az egyenlőszárú háromszögnek az alaphoz tartozó magassága? (Pontos értékekkel számoldj!)

TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

- 1** ☞ Mennyi az ismeretlen szám, ha a számok átlaga 44?
a) 35; x **c)** 33; 44; 45, x
b) -2 ; y **d)** -2 ; -2 ; 105, 105; x
- 2** ☞ A Kis Boltban komoly vita alakult ki egy most bevezetésre kerülő „sikertermék” jövőbeni árának alakításáról.
 Az üzletvezető azt javasolta, hogy az alacsony „bevezető” árat két hónap múlva emeljék fel 20%-kal, majd újabb két hónap múlva további 10%-os emelést hajtsanak végre. Az üzletvezető-helyettes szerint inkább mindkét alkalommal az „átlagos”, 15%-os áremelést hajtsák végre. Szerinte így is ugyanaz lesz négy hónap után a termék ára. Tegyel igazságot a vitában!
- 3** ☞ Árpási úr fizetése egyik hónapban 262 ezer Ft volt. A következő hónapban ennél 8%-kal többet kapott. A harmadik hónapban pedig 8%-kal kevesebbet, mint a második hónapban. Mennyi volt ebben a három hónapban az átlagfizetése?
- 4** ☞ Tóth úr jövedelme januártól júniusig nettó 268 ezer Ft volt. Ekkor fizetésemelést kapott: 12%-kal megnőtt a bére. Majd szeptemberben megint emeltek a fizetésén, ekkor 5%-kal. Mennyi volt ebben az évben az átlagfizetése?
- 5** ☞ A két szám mértani közepe 30. Mennyi az ismeretlen szám?
a) 25; x **b)** y ; 30 **c)** z ; 9 **d)** 0,1; w
- 6** ☞ Bankban fektettünk 100 000 Ft-ot. Két év múlva 110 000 Ft volt a számlánkon.
 Mekkora összeg volt a számlánkon félidőben, az első év elteltével, ha mindkét évben ugyanannyiszorosára nőtt a befektetett összeg?
- 7** ☞ Egy téglalap oldalai 2,7 cm és 7,5 cm.
a) Mekkora annak a négyzetnek az oldalai, melynek a kerülete ugyannyi, mint a téglalap kerülete?
b) Mekkora annak a négyzetnek az oldalai, melynek a területe ugyannyi, mint a téglalap területe?
- 8** ☞ Egy kenyérgyár új keverőgépet szerez be. A gép vételára 3,2 millió Ft. A gép értéke az első évben 16%-kal, a második évben újabb 5%-kal csökken.
a) Mennyit ért a gép egy, illetve két év elteltével?
b) Hány százalékot veszített eredeti értékéből a gép 2 év alatt?
c) Egy dagasztó gép értéke ugyancsak 3,2 millió Ft volt, majd a két év elteltével is megegyezett az értéke a keverőgép értékével. De a dagasztógép értéke a két évben egyenlő százalékkal csökkent. Mennyi volt az értéke az első éve elteltével?
- 9** ☞ Négyzetgyökjel alá vitel segítségével írd egyszerűbb alakba!
 $2\sqrt{8}$; $\frac{1}{3}\sqrt{15}$; $7\sqrt{\frac{2}{7}}$; $0,1 \cdot \sqrt{10}$
- 10** ☞ Írd fel egyszerűbb alakban a szorzatokat!
 $\sqrt{3} \cdot \sqrt{48}$; $\sqrt{11} \cdot \sqrt{33}$; $\sqrt{20} \cdot \sqrt{72}$
- 11** ☞ Végezd el a következő műveleteket!
a) $(\sqrt{18} + \sqrt{50} + 9\sqrt{2})\sqrt{2}$
b) $(\sqrt{27} + \sqrt{75} - \sqrt{3})\sqrt{3}$
- 12** ☞ Végezd el a következő műveleteket!
a) $(\sqrt{7} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{3})$
b) $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{18} - \sqrt{3})$
- 13** ☞ Melyik szám nagyobb? Közelítő érték használata nélkül, átalakításokkal oldjuk meg a feladatokat!
a) $5\sqrt{2}$ $\sqrt{51}$
b) $4\sqrt{\frac{1}{2}}$ $7\sqrt{\frac{1}{7}}$
c) $10\sqrt{\frac{1}{5}}$ $2\sqrt{5}$
d) $12\sqrt{\frac{1}{3}}$ $4\sqrt{2} + \sqrt{3}$
e) $55\sqrt{\frac{1}{11}}$ $12\sqrt{\frac{1}{6}} + \sqrt{150}$
- 14** ☞ Gyökjel alól kihozatal valamint gyökjel alá bevétel segítségével végezzük el a műveleteket!
a) $\sqrt{72} - 4\sqrt{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{98}$
b) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} + 2\sqrt{12} - 5\sqrt{27}$

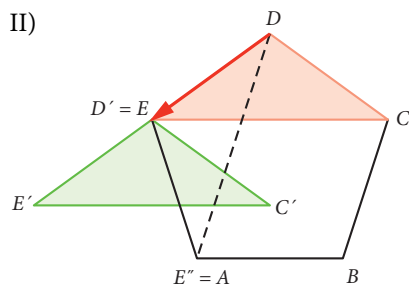
KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy szabályos ötszögnek az ábra szerint behúztuk két átlóját. Igazoljuk, hogy ez a két átló egyenlő hosszú!

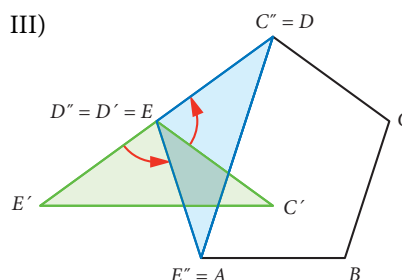


I. Megoldás

A rózsaszínű ECD háromszöget toljuk el a $\overrightarrow{DE}$ vektorral (II. ábra), majd a kapott zöld háromszöget forgassuk el az E pont körül (III. ábra)! Mivel az ötszög oldalai és szögei egyenlők, ezért miután az ECD háromszöget eltoljuk majd elforgatjuk, valóban fedésbe kerül az ADE háromszöggel. Az ECD háromszög tehát egybevágó az ADE háromszöggel, ezért $AD = EC$.



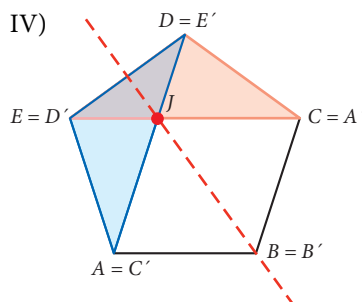
III)



II. Megoldás:

Tükrözzük az ötszöget a B csúcson átmenő szimmetriatengelyére! (IV. ábra) Az ötszög tükörképe egybeesik az eredeti ötszöggel, és a CDE háromszög tükörképe éppen az AED háromszög lesz. Tehát igaz, hogy $AD = CE$.

IV)



Az ábrázolás megoldható a *GeoGebra* program segítségével is.

FELADAT

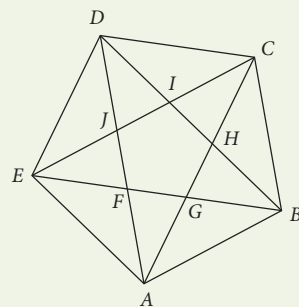
1. Mekkora a IV) ábrán látható kék és rózsaszínű kis háromszögek: EAJ és JCD háromszögek szögei? Igaz-e, hogy a rózsaszínű háromszög is egyenlő szárú?

2. Mekkora a IV) ábrán a fehér négyszög szögei és oldalai, ha a szabályos ötszög oldalai 4 cm-esek?

3. Megrajzoltuk egy szabályos ötszög átlóit.

a) Hány „különböző fajta” háromszög látható az ábrán? Két háromszöget „különböző fajtájúnak” tekintünk, ha nem egybevágók (nem vihetők át egymásba egybevágósági transzformációk – eltolások, elforgatások, tükrözések – alkalmazásával). Mindegyikre adj egy-egy példát a csúcsok megnevezésével!

b) Mekkora a „különböző fajtájú” háromszögek szögei?



ELMÉLET

A 9. osztályban foglalkoztunk egybevágósági transzformációkkal és egybevágó ponthalmazokkal. Idézzük fel, amit akkor tanultunk!

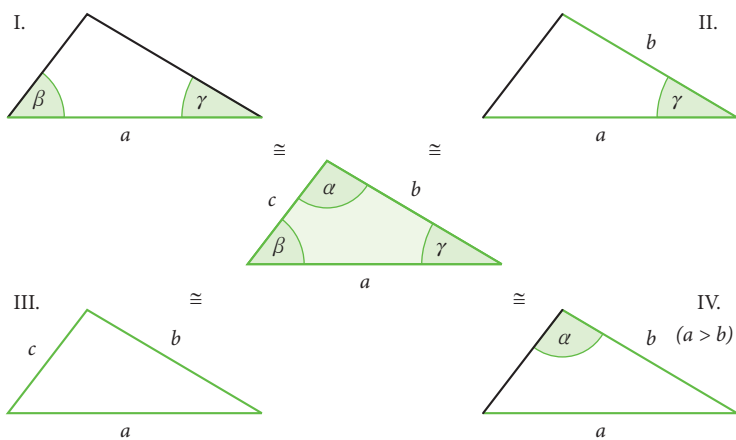
- Két ponthalmazt *egybevágónak* mondunk, ha van olyan egybevágósági (vagyis távolságtartó) transzformáció, amely az egyiket a másikba viszi át.
- Azt, hogy két ponthalmaz egybevágó, az $\cong$ szimbólummal jelöljük.
- Egybevágó sokszögek megfelelő oldalai egyenlő hosszúak, megfelelő szögei egyenlők.
- Az eltolás, a (tengelyes, pontra vonatkozó, síkra vonatkozó) tükrözés, a (pont körüli és a tengely körüli) forgatás is egybevágósági transzformáció.

Például a kidolgozott feladatban: $CDE \triangle \cong AED \triangle$, mert egy tengelyes tükrözés segítségével egymásba átvihetők.

Háromszögek egybevágóságáról bebizonyítható a következő tétel:

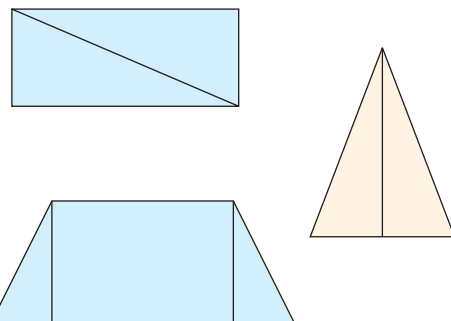
Tétel: háromszögek egybevágóságának alapesetei:

- Ha két háromszögben egy-egy oldal és az ezeken fekvő két-két szög egyenlő, akkor a két háromszög egybevágó.
- Ha két háromszögben két-két oldal és az általuk közbezárt szög egyenlő, akkor a két háromszög egybevágó.
- Ha két háromszögben a három oldal páronként egyenlő, akkor a két háromszög egybevágó.
- Ha két háromszögben két-két oldal és közülük a nagyobbikkal szemben fekvő szög egyenlő, akkor a két háromszög egybevágó.



Például

- a téglalapot (a paralelogrammát) az átlója két egybevágó háromszögre bontja, mert a részek oldalai páronként egyenlők (III. alapeset);
- az egyenlő szárú háromszöget az alaphoz tartozó magassága két egybevágó háromszögre bontja, mert a két keletkező háromszögnek egyenlő két oldala és a hosszabbik oldalakkal szemben fekvő szöge (IV. alapeset);
- ha egy húrtrapézból az ábra szerint levágunk két háromszöget, akkor ezek egybevágók, mert egyenlő egy oldaluk (a trapéz két szára) és az azon az oldalon fekvő két szögük (I. alapeset).

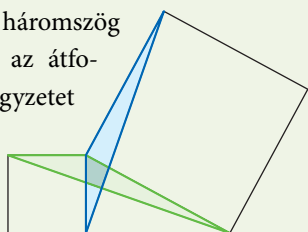


FELADAT

4. Egy négyszög csúcsai A , B , C és D . Tudjuk, hogy két-két szomszédos oldaluk egyenlő, azaz $AB = BC$ és $CD = DA$.

- a) Készíts ábrát!
b) Igazold, hogy a négyszög A -nál és C -nél lévő szöge egyenlő! Melyik alapesettel indokolható az állítás?)

5. Egy derékszögű háromszög egyik befogójára és az átfogójára egy-egy négyzetet állítottunk az ábra szerint. Mutasd meg az I–IV. alapeset valamelyikének felhasználásával, hogy a kék és a zöld háromszög egybevágó! Adj meg olyan egybevágósági transzformációt, amely a kék háromszöget a zöld háromszögbe viszi át!



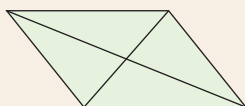
6. Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igazak-e!

- a) Ha két szabályos háromszög egy-egy oldala egyenlő, akkor a két háromszög egybevágó.
b) Ha két derékszögű háromszög átfogója megegyezik, akkor a két háromszög egybevágó.
c) Ha két szabályos háromszögnek ugyanakkora a területe, akkor a két háromszög egybevágó.
d) Ha két egyenlő szárú derékszögű háromszögnek ugyanakkora az átfogója, akkor a két háromszög egybevágó.
e) Ha két egyenlő szárú háromszög egy-egy oldala és ketszöge egyenlő, akkor a két háromszög egybevágó.



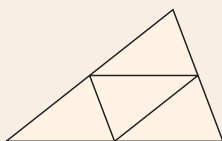
HÁZI FELADAT

1. Megrajzoltuk egy paralelogramma két átlóját. A rajzon nyolc háromszög látható, közöttük 4 olyan pár van, amelyet két egybevágó háromszög alkot.

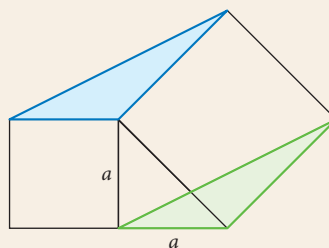


- a) Jelöld meg az egybevágó párokat, és indokold is, hogy miért egybevágó a párt alkotó két háromszög!
b) Hány különböző területű háromszög van a nyolc háromszög között?

2. Összekötöttük egy háromszög oldalfelező pontjait. Mutasd meg, hogy a három szakasz négy egybevágó háromszögre bontja az eredeti háromszöget!

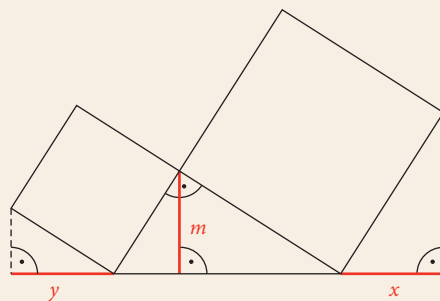


3. Egy egyenlő szárú, derékszögű háromszög egyik befogójára és az átfogójára egy-egy négyzetet állítottunk az ábra szerint.



- a) Igazold, hogy a kék és a zöld háromszög egybevágó! Melyik alapesettel tudod indokolni?
b) Adj meg olyan egybevágósági transzformációt, amely a kék háromszöget a zöld háromszögbe viszi át!

4. Derékszögű háromszög két befogójára egy-egy négyzetet állítottunk az ábra szerint. Igazold, hogy $m = x = y$!



A GeoGebra programmal is ellenőrizheted az állítás helyességét.

EMELT SZINT

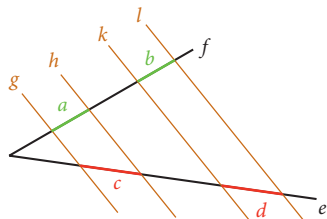
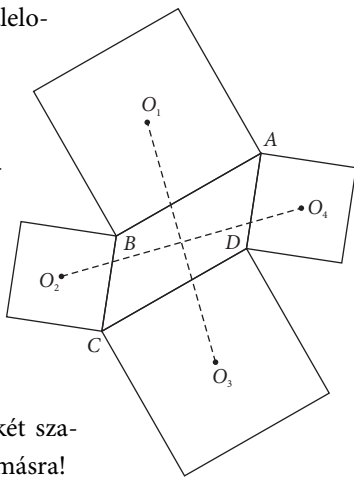
ELMÉLET

Ha két sokszög egybevágó, akkor a megfelelő oldalaik és szögeik páronként egyenlők.

Két sokszög egybevágóságához elégséges, hogy megfelelő oldalaik és szögeik páronként egyenlők legyenek.

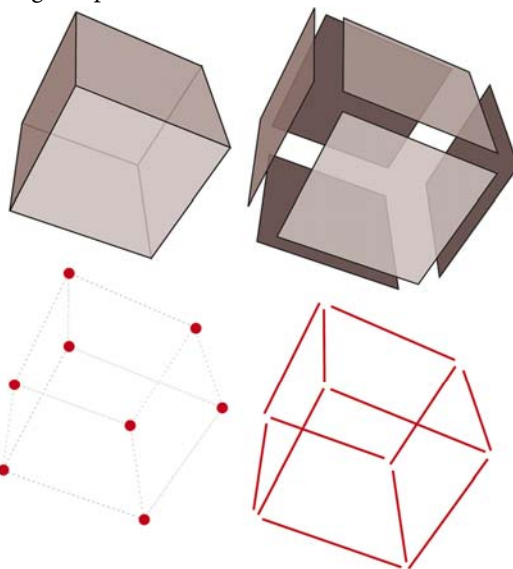
FELADAT

1. Az $ABCD$ paralelogramma oldalaira az ábra szerint egy-egy négyzetet állítottunk. A négyzetek középpontja O_1, O_2, O_3, O_4 . Igazold, hogy az O_1O_3 szakasz hossza egyenlő az O_2O_4 szakasz hosszával, és ez a két szakasz merőleges egymásra!
2. Igazold, hogy ha $g \parallel h \parallel k \parallel l$ és $a = b$, akkor $c = d$!



3. Egy kocka 8 csúcsát jelöljük meg az A, B, C, D, E, F, G és H betűkkel. Ha a csúcsok közül kiválasztunk hármat, azok egy háromszöget határoznak meg.

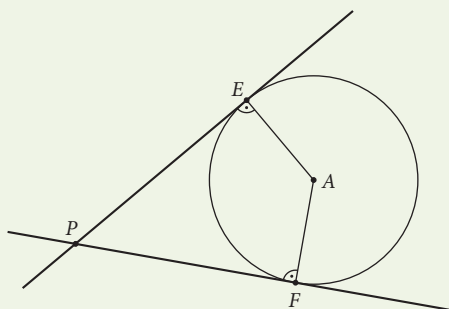
- a) Bizonyítsd be, hogy 56 db háromszöget kaphatunk!
- b) Melyek lesznek ezek közül egybevágók? Ha az egybevágó háromszögeket ugyanolyan háromszögnek tekintjük, akkor hány különböző háromszöget kaphatunk?



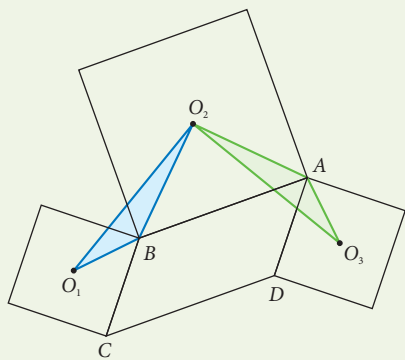
FELADAT

1. Egy körhöz egy külső P pontból meghúztuk a két érintőjét. Igazold, hogy az érintő szakaszok egyenlők! Melyik alapesetet használhatod az indokláshoz?

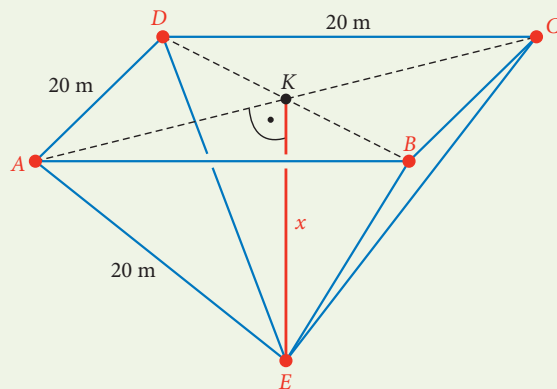
(Emlékeztetőül: Érintő szakasznak hívjuk az érintőn a külső pontot az érintési ponttal összekötő szakaszt. Az érintő merőleges az érintési pontban húzott sugárra.)



2. Az $ABCD$ paralelogramma három oldalára az ábra szerint egy-egy négyzetet állítottunk.

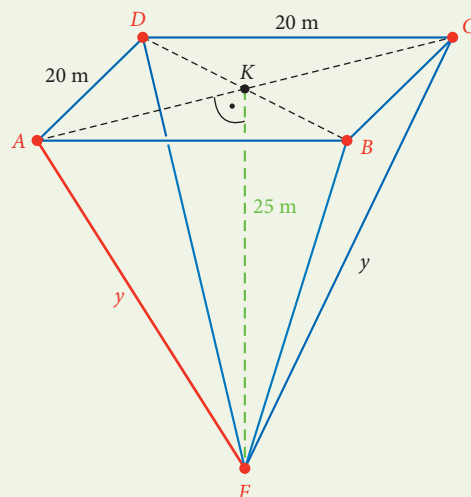


- a) Igazold, hogy $O_1BO_2 \triangle \cong O_3AO_2 \triangle$!
(O_1, O_2, O_3 egy-egy négyzet középpontja.)
- b) Igazold, hogy az $O_1O_2O_3 \triangle$ egyenlő szárú és derékszögű!
3. Búvárok végeztek méréseket egy tóban. 4 piros bója jelezte a merülési területet. A bójak egy 20 m-es oldalú négyzet csúsaiban helyezkedtek el.



- a) Az egyik búvár a négyzet középpontjában függőlegesen merült le úgy, hogy az A jelű bójától 20 m volt a távolsága. Mit mutatott a búvár mélységmérője az E pontban?
- b) Milyen mértani testtel írhatjuk le ezt a problémát? Ennek melyik alkotórészzeit ismerjük? Melyik alkotórészét számítottuk ki?

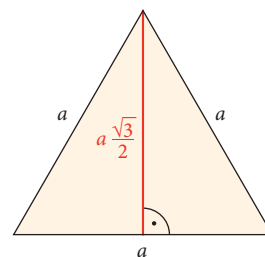
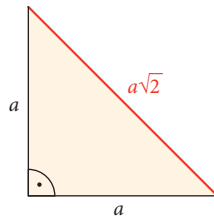
4. Egy másik búvár is középről indult, de ő 25 m mélyre merészkedett. Milyen távol volt az A bójától? És a többitől?



ELMÉLET

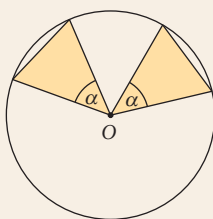
A Pitagorasz-tétel tárgyalásakor a 9. osztályban már megfigyeltük, hogy könnyen megjegyezhető kapcsolatok vannak egyes különleges háromszögek alkotórészei között:

- az a befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója $a\sqrt{2}$ hosszúságú;
- az a oldalú egyenlő oldalú háromszög magassága: $a\frac{\sqrt{3}}{2}$.



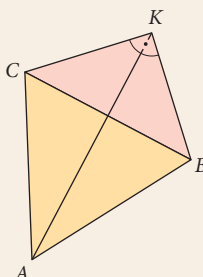
HÁZI FELADAT

- 1.** Egy körbe az ábra szerint felveszünk két olyan háromszöget, melyeknek egyik csúcsa a kör O középpontja, másik csúcsaik a köríven vannak, és az O -nál lévő szögük egyenlő. Igazold, hogy a két háromszög egybevágó!



- Melyik alapesetet használhatod?
- Adj meg olyan egybevágósági transzformációt, amely egyik háromszöget a másikba viszi!

- 2.** Egy szabályos háromszögre az ábra szerint egy egyenlőszárú, derékszögű háromszöget illesztettünk.



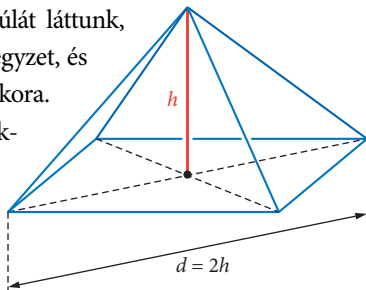
- Igazold, hogy AK szakasz két egybevágó háromszögre vágja szét az $ABKC$ négyszöget!
- Milyen hosszú az AK átló, ha a BC oldal hossza 2,5 cm?
- Mekkora a négyszög területe?

- 3.** A 3. feladatban szereplő bűvár a merülés befejezése után nem függőlegesen emelkedett, hanem az AB szakasz H felezőpontjában bukkant a felszínre.

- Igazold, hogy felbukkanásakor ugyanolyan távol volt C -től, mint D -től!
- Mekkora ez a HC távolság?
- Mekkora utat tett meg az emelkedés során (feltéve, hogy egyenes vonal mentén emelkedett)?
- Milyen nevezetes szakasz HE az ABE háromszögben?

RÁADÁS

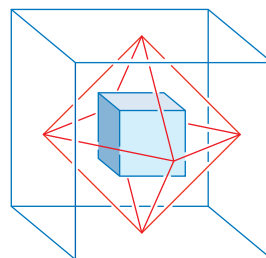
A 3. feladatban olyan gúlát láttunk, amelynek az alaplapja négyzet, és mindegyik éle ugyanakkora. Keress egybevágó derékszögű háromszögeket, és ezeknek a felhasználásával igazold, hogy az ilyen gúlákban $d = 2h$!



Ha papírból elkészítjük két ilyen, egybevágó gúla modelljét, és azokat az alaplapjuknál összeragasztjuk, érde-

kes test, *szabályos oktaéder* keletkezik. Ezt 8 szabályos háromszög határolja (innen ered a neve: „nyolclapú”), 6 csúcsa és 12 egyenlő hosszú éle van.

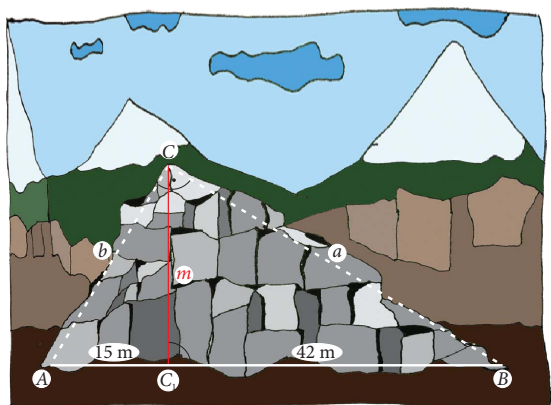
Ilyen testet határoznak meg például a kocka lapközpontjai is. Még érdekesebb: a szabályos oktaéder lapközpontjai pedig egy kockát határoznak meg.



KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Egy szikla csúcsa nehezen közelíthető meg, ám alkalmas távolságok mérésével kielégítő becslés adható a magasságára.

Számítsuk ki, mekkora a CC_1 magasság, ha ismert az AC_1 és a BC_1 szakaszok hossza!



Megoldás

Az ábrán három derékszögű háromszög látható: ABC , AC_1C és BC_1C .

A két kisebbre írjuk fel a Pitagorasz-tételt:

$$a^2 = m^2 + 42^2 \quad \text{és} \quad b^2 = m^2 + 15^2.$$

Az ABC háromszögre pedig $a^2 + b^2 = (42 + 15)^2$.

$$\text{Ebből } (m^2 + 42^2) + (m^2 + 15^2) = (42 + 15)^2.$$

$$2m^2 + 42^2 + 15^2 = 42^2 + 2 \cdot 42 \cdot 15 + 15^2.$$

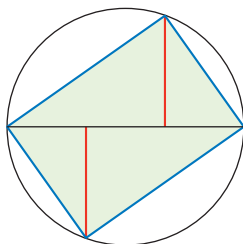
$$m^2 = 42 \cdot 15$$

$$m = \sqrt{42 \cdot 15} \approx 25,1 \text{ (m)}.$$

Általánosságban is belátható, hogy derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság négyzete egyenlő az átfogó két szeletének a szorzatával, másként: az átfogóhoz tartozó magasság az átfogó két szeletének a mértani közepe.

2. Az ácsok így faragják egy henger alakú fatörzsből a legszilárdabb gerendát:

a keresztmetszet egyik átmérőjét három egyenlő részre osztják, majd a két osztópontban, az ábra szerint, merőlegest állítanak az átmérőre.

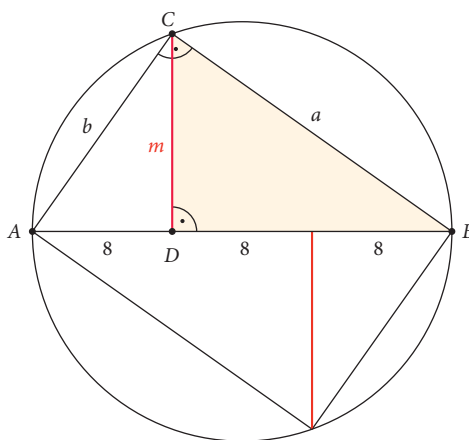


Ezeknek a merőlegeseknek a körrel való metszéspontjai és az eredeti átmérő végpontjai egy négyszöget határoznak meg. Ez lesz a legszilárdabb gerenda keresztmetszete.

Számítsuk ki, mekkorák ennek a négyszögnek az oldalai, ha a henger keresztmetszete 24 cm átmérőjű kör!

Megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Használjuk fel az előző példában felírt összefüggést:

$$m^2 = 16 \cdot 8.$$

Írjuk fel Pitagorasz tételét a BCD háromszögre:

$$a^2 = 16^2 + m^2.$$

$$\text{Ezekből: } a^2 = 16^2 + 16 \cdot 8.$$

$$\text{Emeljünk ki 16-ot: } a^2 = 16 \cdot (16 + 8)$$

$$a^2 = 16 \cdot 24$$

$$a = \sqrt{16 \cdot 24} \approx 19,6 \text{ (cm)}.$$

Ugyanilyen úton levezethető, hogy

$$b = 8 \cdot 24, \text{ és } b = \sqrt{8 \cdot 24} \approx 13,9 \text{ (cm)}.$$

A legszilárdabb gerenda oldalainak hossza 19,6 cm, illetve 13,9 cm.

Minden derékszögű háromszögben a befogó négyzete egyenlő az átfogónak és a befogó átfogóra eső merőleges vetületének a szorzatával.

Másképp fogalmazva:

A befogó mértani közepe az átfogónak és a befogó átfogóra eső merőleges vetületének.

A példában megfogalmazott észrevételek minden derékszögű háromszög esetén érvényesek.

Magasságtétel

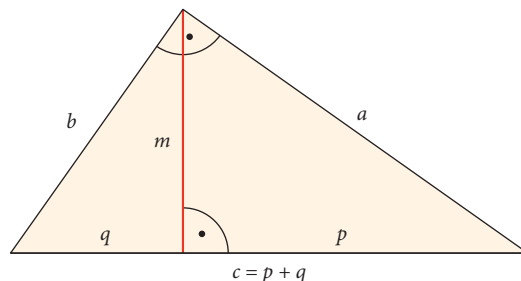
A derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót két szeletre osztja, és az átfogóhoz tartozó magasság a két szelet mértani közepe. Az ábra jelölései szerint: $m = \sqrt{pq}$.

Befogótétel

A derékszögű háromszög bármelyik befogója az átfogónak és a befogó átfogóra eső merőleges vetületének mértani közepe.

Az ábra jelölései szerint: $a = \sqrt{pc}$ és $b = \sqrt{qc}$.

A bizonyításokat megtalálod a lecke végén, az Emelt szintű részben.



FELADAT

1. Derékszögű háromszögben az átfogót a hozzá tartozó magasság 2 cm és 3 cm hosszú részekre osztja.

- Mekkora az átfogóhoz tartozó magasság?
- Mekkora a háromszög hosszabbik befogója?
- Mekkora a háromszög területe?

2. Derékszögű háromszög egyik befogója 30 cm, átfogója 45 cm.

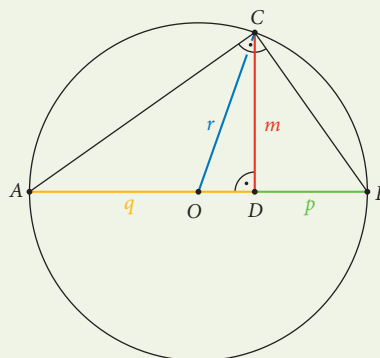
- Milyen hosszú a 30 cm-es befogónak az átfogóra eső merőleges vetülete?
- Mekkora az átfogóhoz tartozó magassága?

3. Derékszögű háromszög befogóinak hossza 8 cm és 15 cm.

- Mekkora a háromszög átfogója?
- Mekkora részekre osztja az átfogót a hozzá tartozó magasság?
- Mekkora az átfogóhoz tartozó magasság?

4. Az ABC szabályos háromszög AB oldalának hossza 12 cm. Az AB oldal F felezőpontjából állíts merőlegest az AC oldalra! Mekkora szakaszokra osztja a merőleges az AC oldalt? Oldd meg a feladatot a szabályos háromszög ismert tulajdonságainak felhasználásával, majd a befogótétel felhasználásával is!

5. Melyik állítás igaz, melyik hamis?
($BD = p$, $AD = q$,
O a kör középpontja, r a kör sugara.)



- $m = \sqrt{pq}$
- $r = \frac{p+q}{2}$
- $r \geq m$
- $AC = \sqrt{q(p+q)}$
- $BC^2 = BD \cdot AB$
- $OD = \frac{|p-q|}{2}$
- $r^2 = \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 + pq$
- $AC + BC = AB$
- $r - m = OD$

HÁZI FELADAT

1. Egy derékszögű háromszög átfogója 16 cm, egyik befogója 15 cm.

- A befogótétel segítségével határozd meg, hogy mekkora részekre osztja az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót!
- A magasságtétel segítségével számold ki az átfogóhoz tartozó magasság hosszát!
- Mekkora a háromszög területe?

2. Derékszögű háromszög átfogóját a hozzá tartozó magasság egy 5,4 cm és egy 9,6 cm hosszú szakaszra osztja.

- A magasságtétel, illetve a befogótétel alkalmazásával számítsd ki, hogy mekkora az átfogóhoz tartozó magasság és mekkorák a befogók!
- Mekkora a háromszög körülírt körének sugara?

3. Szerkessz olyan derékszögű háromszöget, amelynek az átfogóját a magasság 2 cm és 8 cm hosszú szakaszokra osztja! Számítással határozd meg a magasság és a befogók hosszát, majd ellenőrizd mérésrel az eredményeidet!

EMELT SZINT

Bizonyítsuk be a magasságtételt!

Pitagorasz tétele szerint

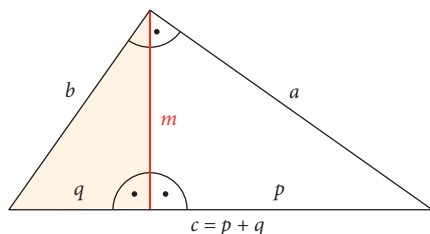
$$a^2 + b^2 = c^2; \quad a^2 + b^2 = (p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2.$$

Átrendezve:

$$(a^2 - p^2) + (b^2 - q^2) = 2pq; \quad m^2 + m^2 = 2pq;$$

$$m^2 = pq; \quad m = \sqrt{pq}.$$

A számítás során felhasználtuk, hogy a magasság két derékszögű háromszögre bontja az eredeti háromszöget.



Bizonyítsuk be a befogótételt!

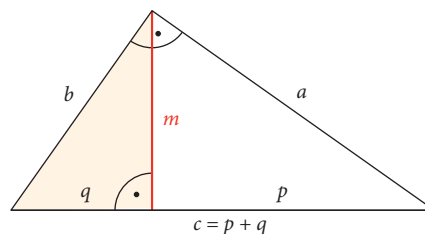
Az $a = \sqrt{pc}$ állítás igazolásához Pitagorasz tételét és a magasságtétel $m^2 = pq$ alakját használjuk fel.

A szürke háromszög derékszögű, ezért

$$a^2 = m^2 + p^2 = pq + p^2 = p(p + q) = pc.$$

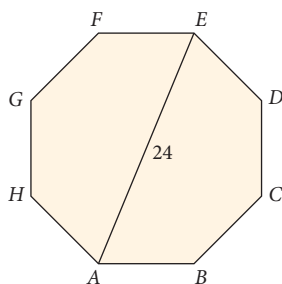
Ha $a^2 = pc$, akkor $a = \sqrt{pc}$.

Hasonlóan igazolható az is, hogy $b^2 = qc$, vagyis $b = \sqrt{qc}$.



FELADAT

- Számítsd ki, mekkora a szabályos nyolcszög oldala!
 - Mekkora távolságra vannak a szabályos nyolcszög csúcsai az AE átló egyenesétől?



- Bizonyítsd be, hogy AOB háromszög derékszögű!
 - Bizonyítsd be, hogy g érintési pontja olyan részekre osztja az AB szakaszt, melyek mértani közepe éppen a kör sugarával egyenlő!
 - Bizonyítsd be, hogy ha egy szimmetrikus trapéz olyan, hogy van beírt köre is, akkor a két alapjának a mértani közepe egyenlő a trapéz magasságával!

Két pozitív szám négyzetes közepe és harmonikus közepe

Definíció

Az a és b pozitív számok **négyzetes közepének** nevezzük a $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ számot,

harmonikus közepének pedig a $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ számot.

Megjegyzés: az a és b pozitív számok harmonikus közepét írhatjuk $\frac{2ab}{a+b}$ alakban is.

Tétel

Ha a és b pozitív számok, akkor $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Ha a és b egyenlő, akkor mind a négy közép egyenlő a -val (és természetesen b -vel). Ha a és b nem egyenlő, akkor a négy közép közül semelyik kettő nem egyenlő egymással.

Szemléltetés:

Az alábbiakban egy olyan geometriai szemléltetés látható, amely egy ábrában mutatja az a és b pozitív számok ($a \neq b$) négy nevezetes közepét és a közöttük fennálló egyenlőtlenségeket is.

Legyen $0 < b < a$, továbbá legyenek a P kezdőpontú félegyenesre illeszkedő, A, B pontok olyanok, hogy $PA = a$ és $PB = b$. Jelöljük K -val az AB átmérőjű kör középpontját. Mivel $AB = a - b$, ezért a kör sugara $\frac{a-b}{2}$.

Első lépés

$PK = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$, tehát ez a szakasz a számtani közepet szemlélteti.

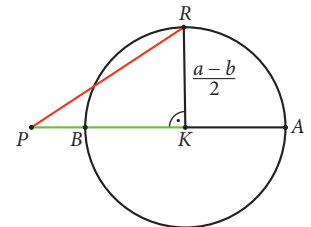
Állítsunk a K pontban merőlegest PA -ra, legyen R a merőleges és a kör egyik metszéspontja.

A PKR derékszögű háromszögből a Pitagorasz-tétel miatt $PR^2 = PK^2 - RK^2$, ebből:

$$PR = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \text{ tehát a } PR \text{ szakasz a négyzetes}$$

közepet szemlélteti.

Mivel a PKR derékszögű háromszög PR átfogója hosszabb a PK befogójánál, ezért $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$.



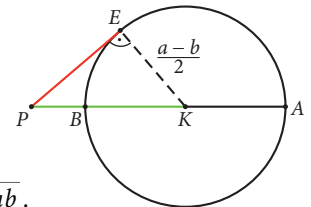
Második lépés

Legyen E a P -ből a körhöz húzott egyik érintő érintési pontja.

A Pitagorasz-tétel szerint $PE^2 = PK^2 - KE^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{4ab}{4} = ab$.

$PE = \sqrt{ab}$, tehát ez a szakasz a mértani közepet szemlélteti.

Mivel a PKE derékszögű háromszög PK átfogója hosszabb a PE befogójánál, ezért $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.



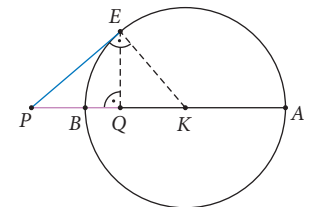
Harmadik lépés

A PKE derékszögű háromszögben állítsunk az E pontból merőlegest PA -ra, legyen a merőleges talppontja Q .

A befogótétel szerint $PE^2 = PK \cdot PQ$, vagyis $ab = \frac{a+b}{2} \cdot PQ$.

Ebből $PQ = \frac{2ab}{a+b}$, tehát PQ a harmonikus közepet szemlélteti.

Mivel a PQE derékszögű háromszög PE átfogója hosszabb a PQ befogójánál, ezért $\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.



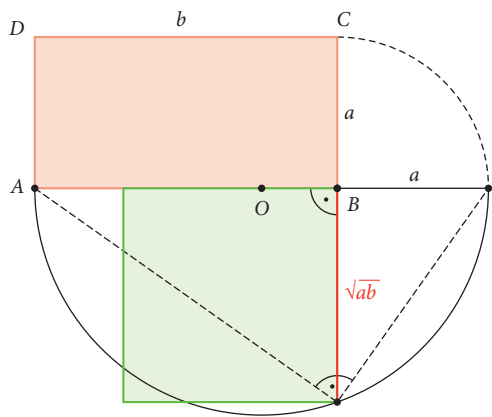
Egyszerűen látható az is, hogy egyenlőség mindegyik esetben pontosan akkor lehetséges, ha $a = b$.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Szerkesszünk olyan négyzetet, amelynek a területe megegyezik az $ABCD$ téglalap területével!

Megoldás

A téglalap oldalainak hossza legyen a és b , területe ekkor ab .



Ha egy négyzetnek ugyanekkora a területe, akkor az oldala $\sqrt{ab}$ hosszúságú.

Tehát az a és a b ismeretében $\sqrt{ab}$ hosszúságú szakaszt kell szerkesztenünk.

Ez lesz a keresett négyzet oldala.

Feladatunkat így is megfogalmazhatnánk:

Szerkesszünk olyan szakaszt, amelynek a hossza két adott hosszúság mértani közepe!

Mérjük az ábra szerint a b hosszúságú AB szakasz után egy a hosszúságú szakaszt. A Thalész-tétel felhasználásával szerkesszünk egy olyan derékszögű háromszöget, amelynek az átfogója $a + b$ hosszúságú, és az átfogóhoz tartozó magasságának talppontja éppen a B pont.

A magasságtétel szerint az átfogóhoz tartozó magasság $\sqrt{ab}$ hosszúságú. Ha tehát egy olyan négyzetet szerkesztünk, amelynek éppen ekkora az oldala, akkor annak a területe ab lesz.

FELADAT

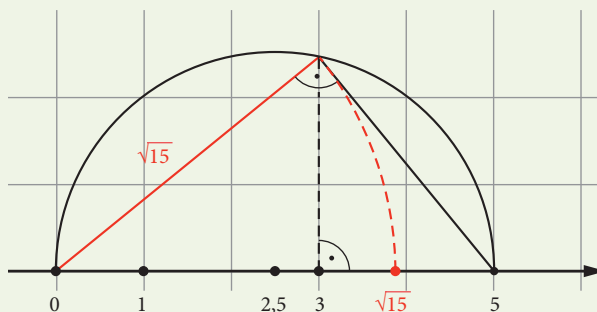
1. Egy derékszögű háromszög Thalész körének sugara 2,5 cm. Az átfogóhoz tartozó magasság talppontja úgy vágja ketté az átfogót, hogy a hosszabbik rész 4 cm.

- Mekkora a háromszög átfogója?
- Milyen hosszú az átfogóhoz tartozó magasság?
- Mekkora a háromszög területe?

2. Egy derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót 2 cm és 8 cm hosszú részekre osztja.

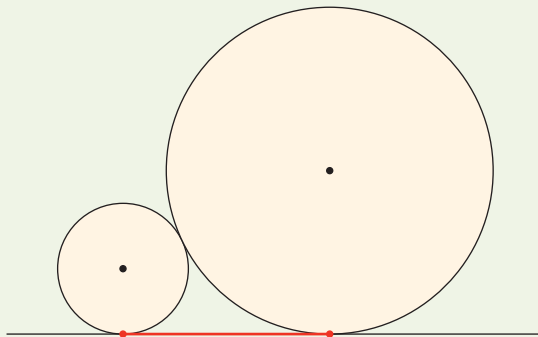
- Szerkeszd meg a háromszöget!
- Milyen hosszú az átfogóhoz tartozó magasság?
- Egészítsd ki az ábrát úgy, hogy szemléletesen leolvasható legyen az ábráról, hogy a Thalész-kör sugara (az átfogóra eső vetületek számtani közepe) mindig nagyobb vagy egyenlő, mint az átfogóhoz tartozó magasság (az átfogóra eső vetületek mértani közepe)!

3. a) Az ábra alapján magyarázd el, hogyan szerkesztettük meg a számegyenesen a $\sqrt{15}$ szám helyét! Indokold a szerkesztés helyességét!



- Az ábra melyik szakaszának hossza $\sqrt{6}$, és melyik szakasz $\sqrt{10}$ hosszúságú?
- Szerkeszd meg a számegyenesen a $\sqrt{20}$ szám helyét!

4. Egy 2 cm és egy 5 cm átmérőjű kör kívülről érinti egymást.



- a) Hogyan kapható meg a két kör középpontját összekötő szakasz hossza az átmérők hosszából?
 b) Számítással igazold, hogy a közös érintőszakaszuk hossza éppen a két átmérő mértani közepével egyenlő!

- c) Az ábra alapján leolvasható a két átmérő szám-tani és mértani közepe közötti nagysági viszony is. Hogyan?
 d) Igazak-e az előbbiekhöz hasonló állítások más nagyságú, kívülről érintkező körök esetében is?

5. Egy 5 cm sugarú kör O középpontjától 3 cm-re van a P pont. A P ponton át húzott átmérőre merőlegest állítunk P -ben.

Mekkora ennek az egyenesnek a kör belsejébe eső része?

(Belátható, hogy a P ponton áthaladó húrok közül ez a legrövidebb.)

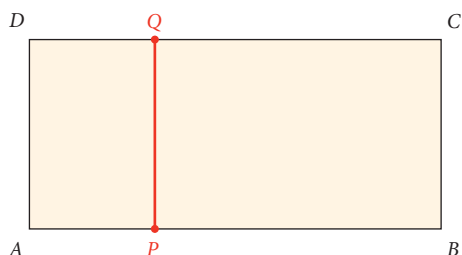
HÁZI FELADAT

1. Egy kör sugara 4,5 cm, a kör egy átmérőjének végpontjai A és B . Az AB átmérőt T pont 1 : 2 arányban osztja. T -ben merőlegest állítunk az AB átmérőre, ennek a körrel vett egyik metszéspontja legyen C .
 a) Milyen hosszú az ABC háromszög AB oldalhoz tartozó magassága?
 b) Milyen hosszúak az ABC háromszög oldalai?
 c) Mekkora az ABC háromszög területe?

2. a) Szerkeszd meg a számegyenesen a magasságtétel segítségével a $\sqrt{24}$ helyét!
 b) Szerkeszd meg a számegyenesen a befogótétel segítségével a $\sqrt{24}$ helyét!
 3. Szerkessz olyan négyzetet, amelynek a területe pontosan 18 cm^2 !

RÁADÁS

1. Többféleképpen is felvághatjuk két téglalapra az $ABCD$ téglalapot. Bence szerint ez akkor a „legkellemesebb” az emberi szemnek, ha a hosszabb (AB) oldal két részének a mértani közepe éppen az eredeti téglalap rövidebb (AD) oldalával egyenlő.



- a) Szerkeszd meg a Bence szerinti „kellemes” felosztást egy olyan téglalap esetében, amelynek rövidebb oldala 2 cm, hosszabb oldala pedig 6 cm!

Hány megfelelő pont szerkeszthető a hosszabbik oldalon?

- b) Van-e olyan téglalap, amelynek csak egyetlen „kellemes” felosztása van?
 c) Van-e olyan téglalap, amelynek nincs olyan felosztása, amely Bence szerint „kellemes” lenne?
 d) Dönci azt mondta Bencének, hogy szerinte a „kellemes” felosztás meghatározásánál a mértani közép helyett a számtani közepet kellene választania. Mi a véleményed erről?

2. Egy fémlapra két 4 cm átmérőjű és egy 9 cm átmérőjű üveggömböt helyezünk el úgy, hogy mindegyik gömb mindegyikkel érintkezik, és a fémlaphoz is hozzáér. Mekkora a fémlapon az érintési pontok alkotta háromszög oldalai?

17 GYAKORLÁS

CSOPORTMUNKA

Alkossatok négyfős csoportokat!

1. 📢 Oldjátok meg az 1–8. feladatokat! Az a csoport, amelyik először írja fel a jó eredményt a táblára, jutalomban részesül. Amikor minden csoport felírta az eredményét, akkor a verseny véget ér. Amíg van olyan csoport, amelyik nem végzett a munkájával, addig a már végzetek egyszer javíthatnak a táblára felírt számukon.

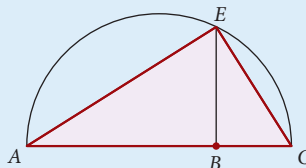
1. feladat

Egy téglalap oldalai 1 cm és 7 cm. A téglalapnak megrajzoltuk a két középvonalát (a szemközi oldalak felezőpontjait összekötő szakaszokat), és a két átlóját. Keletkezett az ábrán 16 darab háromszög. Ha az egybevágó háromszögeket ugyanolyannak tekintjük, akkor hányféle háromszög keletkezett?

Jelöld ezt a számot **A**-val!

2. feladat

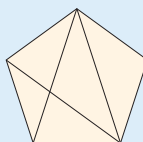
Az ábrán egy félkört láthatsz. A félkör átmérője (AC) 7 egység hosszúságú, BC hossza 2 egység. Mennyi az AE hosszának négyzete?



Az eredményt jelöld **B** betűvel!

3. feladat

Megrajzoltuk egy szabályos ötszög 3 átlóját. Hány 36° -os szög keletkezett?



Az eredményt jelöld **C** betűvel!

4. feladat

Egy háromszög oldalhosszúságai: $\sqrt{7}$ cm, $\sqrt{18}$ cm, 5 cm. Hány fokok a legnagyobb szöge?

A kapott számot jelöld **D**-vel!

5. feladat

Hányszorosa a $\sqrt{72}$ a $\sqrt{2}$ -nek? Fejezd ki az eredményt egy egész számmal!

A kapott számot jelöld **E**-vel!

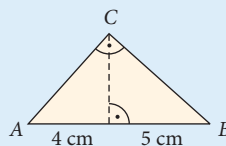
6. feladat

Fejezd ki egy egész számmal, hogy mennyi $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{30}} : \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$!

A kapott számot jelöld **F**-fel!

7. feladat

Hány cm-es az ABC háromszög legrövidebb oldala?



A kapott számot jelöld **G**-vel!

8. feladat

Mennyi $\frac{B-C}{A+G} + \frac{D}{EF}$?

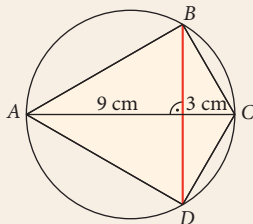
A kapott számot írd fel a táblára!

2. 📢 Az első 3 helyezett csapat mutassa be, milyen egyszerű módszereket alkalmazott a megoldások közben!

HÁZI FELADAT

1. Az AB szakaszon felvettük a P és Q pontot úgy, hogy $AP = 4$ cm, $AQ = 12$ cm legyen. A PQ szakasz hossza mértani közepe az AP és a PB szakasz hosszának. Hány cm hosszú az AB szakasz?

2. Egy kör AC átmérőjét a rá merőleges BD húr egy 9 cm-es és egy 3 cm-es szakaszra osztja.



- a) Hány cm hosszú a BD húr?
b) Mekkora az $ABCD$ deltoid kerülete és területe?

3. Egy számegyenesen adottak az 0 és az 1 értékhez tartozó pontok.

- a) Szerkeszd meg ezen a számegyenesen a $\sqrt{7}$ helyét!
b) Mekkora annak a derékszögű háromszögnek az oldalai, melynek átfogójához tartozó magassága $\sqrt{7}$ hosszúságú, és egyik befogója $\sqrt{8}$ hosszúságú?

EMELT SZINT

FELADAT

1. Igaz-e a magasságtétel megfordítása?

Megoldás

Azt kell megvizsgálnunk, hogy ha egy háromszög egyik magassága két olyan szeletre osztja a háromszög oldalát, amelyeknek a magasság a mértani közepe, akkor derékszögű-e a háromszög. Látni fogjuk, hogy ez az állítás igaz.

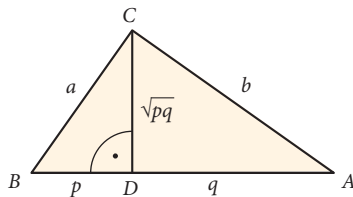
A BDC derékszögű háromszögből: $a^2 = p^2 + pq$,
az ADC derékszögű háromszögből: $b^2 = q^2 + pq$.

A két egyenletből:

$$a^2 + b^2 = p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2.$$

Az ABC háromszögben $p + q = AB$, tehát igaz, hogy $AB^2 = BC^2 + CA^2$.

A Pitagorasz-tétel megfordítása szerint ez azt jelenti, hogy az ABC háromszög derékszögű, és a derékszöge a C csúsnál van.



2. Igazoljuk, hogy a derékszögű trapéz átlói akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha a trapéz derékszögű szára a két alap mértani közepével egyenlő!

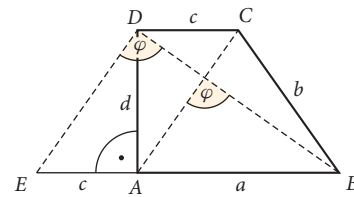
Bizonyítás

Húzzunk párhuzamost az ábra szerint az AC átlóval a D csúsból!

Ekkor egyrészt az EDB $\sphericalangle$ megegyezik az átlók szögével, mert egyállású szögek, másrészt az $EACD$ négyszög paralelogramma, hiszen szemközti oldalai párhuzamosak. Emiatt $EA = CD$.

Ha tudjuk, hogy az átlók merőlegesek, akkor az EDB háromszög derékszögű, ezért a magasságtétel miatt $d = \sqrt{ac}$. Ha viszont azt tudjuk, hogy $d = \sqrt{ac}$, akkor a magasságtétel megfordítása miatt $EDB \sphericalangle = 90^\circ$, tehát a trapéz átlói merőlegesek.

Ezzel az állítást bizonyítottuk.



FELADAT

1. A Harry Potter könyvekben szerepel egy óra, amely nem az időt mutatja, hanem azt, hogy melyik családtag hol tartózkodik éppen. A mutatókon szerepelnek a családtagok, és a „számlapon” pedig a lehetséges helyszínek, mint „iskola”, „munkahely”, „otthon”, „útközben”, „életveszélyben”, stb. (Akadt olyan lelkes olvasó, aki GPS és mobiltelefonok segítségével készített egy ilyen szerkezetet a saját családjához.)

Egy ilyen óra kerülete legyen 48 cm. Az óra „számlapja” 5 db, körcikk alakú területre van bontva. Az „iskola” rész a 12 órától a 4 óráig tart (amennyiben egy hagyományos óra számlapjához viszonyítjuk), a „munkahely” rész 4 órától 6 óráig, az „útközben” rész 6-tól 8 óráig, az „otthon” rész 8-tól 11 óráig, az „életveszélyben” rész pedig 11-től 12 óráig.

- a) Milyen hosszú körívek tartoznak az egyes részekhez az óra „számlapjának” kerületén?
b) Mekkora az egyes tartományokban az a szög, amelyet a tartományokat határoló sugarak zárnak közre?



ELMÉLET

Pontosítsuk a címben szereplő fogalmakat, és figyeljük meg ezeknek néhány tulajdonságát!

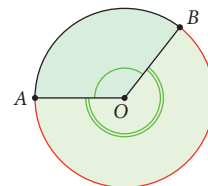
Rajzoljuk meg egy kör két sugarát, az OA -t és az OB -t!

Most a körvonalat két **körívre**, a körlemez két **körcikkre** bontottuk.

Két olyan szöget is látunk, amelyeknek O a csúcsa, az OA és az OB félegyenese pedig a két szára.

Ezeket a szögeket az adott körre nézve **középponti szögeknek** mondjuk.

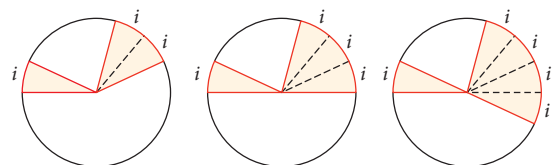
A körbe rajzolt két sugár két olyan középponti szöget ad meg, amelyeknek az **összege egy teljeszög**.



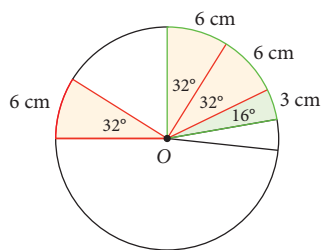
Igazak a következő kijelentések (tételek). Egy körben

- minden középponti szöghöz tartozik egy körív és egy körcikk; **egyenlő középponti szögekhez egyenlő hosszúságú körívek és egyenlő területű körcikkek tartoznak;**
- minden körívhez tartozik egy középponti szög és egy körcikk; **egyenlő körívekhez egyenlő nagyságú középponti szögek és egyenlő területű körcikkek tartoznak;**
- minden körcikkhez tartozik egy középponti szög és egy körív; **egyenlő területű körcikkekhez egyenlő nagyságú középponti szögek és egyenlő hosszúságú körívek tartoznak.**

Ha egy körben egy középponti szög 2-szer, 3-szor, 4-szer, ... akkora, mint egy másik középponti szög, akkor a nagyobbikhoz tartozó körív is és körcikk is 2-szer, 3-szor, 4-szer, ... akkora, mint a kisebbikhez tartozó körív, illetve körcikk.



Bizonyítható, hogy egy körben a középponti szögek nagysága, a hozzájuk tartozó körívek hosszúsága és a hozzájuk tartozó körcikk területé egyenesen arányos.



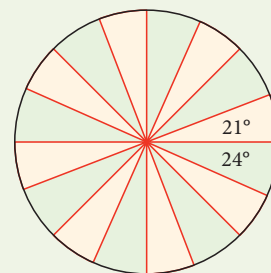
Például az ábrán megadott kör esetében: a 80° -os középponti szög 2,5-szer akkora, mint a 32° -os, ezért 2,5-szer olyan hosszú (15 cm-es) körív és 2,5-szer akkora területű körcikk tartozik hozzá, mint a 32° -oshoz.

Fordítva: a 15 cm hosszú körívhez 2,5-szer akkora középponti szög tartozik, mint a 6 cm hosszúhoz (valóban, $15 : 6 = 80 : 32 = 2,5$).

FELADAT

2 Az ábrán látható szerencsekerék „nyert” mezői 21° -os középponti szögű körcikk, „nem nyert” mezői 24° -os középponti szögű körcikk. (A kerék sugara a valóságban 50 cm.) A táblázat kitöltésével válaszolj a kérdésekre! A füzetedben dolgozz!

- a) Mekkora körív tartozik egy „nyert” feliratú mezőhöz, és mekkora egy „nem nyert” feliratúhoz?
- b) Mekkora egy nyerő és egy nem nyerő körcikk területe?



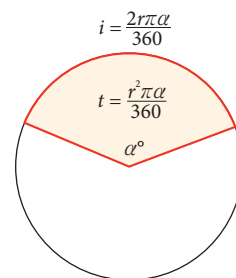
Középponti szög fokban	Körív hossza cm-ben	Körcikk területe cm^2 -ben
360°		
1°		
21°		
24°		

ELMÉLET

Ha egy r cm sugarú körben egy középponti szög α° -os, akkor a hozzá tartozó körív hossza a körkerület 360-ad részének az α -szorosa. Ha ennek a cm-ben mért hosszúságát i -vel jelöljük, akkor

$$i = \frac{2r\pi}{360} \cdot \alpha = \frac{r\pi\alpha}{180} \text{ (cm)}.$$

Ugyanebben a körben egy α° -os középponti szöghöz tartozó körcikk területe a körterület 360-ad részének az α -szorosa. Ha ennek a cm^2 -ben mért nagyságát t -vel jelöljük, akkor

$$t = \frac{r^2\pi}{360} \cdot \alpha = \frac{r^2\pi\alpha}{360} \text{ (cm}^2\text{)}.$$


FELADAT

3 Mekkora az 1. Feladatban szereplő „órán” az egyes részek területe?

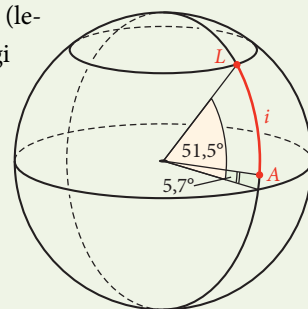
FELADAT

4. Oldd meg a következő feladatokat! Készíts vázlatot a körcikkéről!

- Mekkora annak a 12 cm sugarú körívnek a hossza és a körcikk területe, amelynek a középponti szöge 107° ?
- Mekkora a 181,5 mm ívhosszúságú, 200° -os középponti szögű körcikk sugara és területe?
- Mekkora a 10 m sugarú, 10 m ívhosszúságú körcikk középponti szöge és területe?



5. Körülbelül hány km-t repül az a repülőgép, amely Londonból Accrába (Ghana) tart (le szállás nélkül)? A londoni repülőtér a 0° -os hosszúsági és $51,5^\circ$ -os északi szélességi körön fekszik, az accrai repülőtér pedig szintén (megközelítőleg) a 0° -os hosszúsági és $5,7^\circ$ -os északi szélességi körön fekszik. (A Föld sugarát vedd 6370 km-nek!)



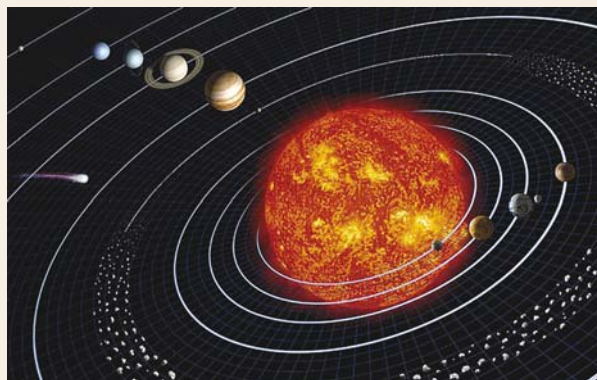
HÁZI FELADAT

1. Oldd meg a következő feladatokat! Készíts vázlatot a körcikkekről!

- Mekkora annak a 100 cm ívhosszúságú körcikknek a sugara és területe, melynek középponti szöge $286,5^\circ$?
- Mekkora a 42° -os középponti szögű, 450 m^2 területű körcikk sugara és ívhosszúsága?
- Mekkora a középponti szöge és a területe egy 15 cm sugarú kör 45 cm hosszú ívéhez tartozó körcikkének?
- Egy körcikk területe $24\pi \text{ cm}^2$, a hozzá tartozó körív hossza $6\pi \text{ cm}$. Mekkora a középponti szöge és a sugara?

2. A Föld Nap körüli mozgásának pályája közelíthető egy 150 millió km sugarú körrel.

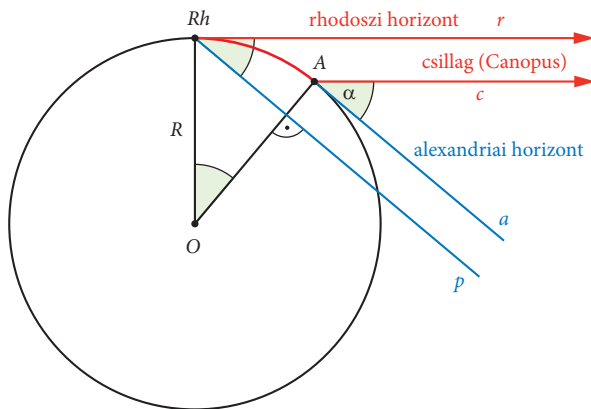
- Mekkora a Föld pályájának kerülete?
- Mekkora ívet fut be a Föld egy nap alatt, és mekkora az ehhez az ívhez tartozó középponti szög?
- Mekkora a Föld pályájának 150 millió km hosszú ívéhez tartozó középponti szög, és mekkora az ívhez tartozó körcikk területe?



1. A görög Poszeidóniosz „megmérte” a Föld kerületét (az Egyenlítő hosszát), ehhez a jól látható Canopus csillagot használta.

Úgy vélte, hogy Rhodosz és Alexandria azonos hosszúsági körön fekszik, és a két település távolságát az utazók számításai alapján 5000 stadiumnak vette.

Amikor Rodoszból a horizonton (r) éppen meg lehet pillantani a Canopust, akkor Alexandriában a csillagot az ottani horizonthoz (a) képest a teljesszög 48-ad részének megfelelő szög (α) alatt lehetett látni. A Canopushoz Rodoszból és Alexandriából húzott „látósugarakat” (r és c) a csillag nagyon nagy távolsága miatt párhuzamosnak tekinthetjük. (Figyeld az ábrát! Az ábrán megjelenő távolságok nem méretarányosak, az α is jóval nagyobb az ábrán, mint a valóságban.)



A horizont mindig merőleges a sugárra, így ha meghúzzuk az alexandriai horizontegyenessel párhuzamos p egyenest, amely „Rodoszon megy át”, akkor a rhodoszi horizont egyenesének és ennek az utóbbi egyenesnek a szöge szintén α (egyállású szögek miatt). Ebből következik, hogy az 5000 stadium hosszú körívhez tartozó **középponti szög** is α (merőleges szárú hegyesszögek miatt).

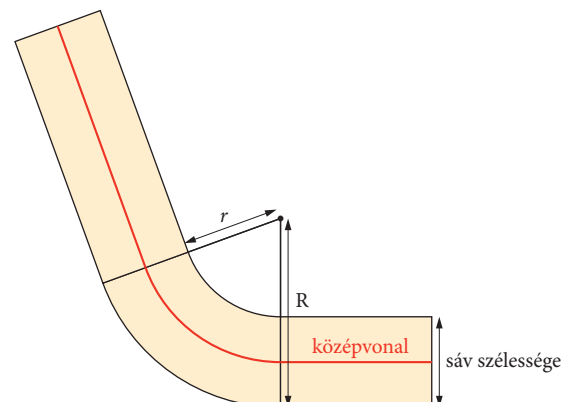
Poszeidóniosz az előbbi adatokból kiszámította, hogy hány stadium a Föld „kerülete”.

- Gondold végig, hogyan számolhatott Poszeidóniosz! Számítsd ki a Föld „kerületének” (az Egyenlítőnek) a hosszát a megadott adatokból!
- A kör kerületének ma ismert képletéből számítsd ki, hány stadiumnak mérhette Poszeidóniosz a Föld sugarát!
- A kapott eredmény alapján számítsd ki, mennyit tévedett az ókori tudós, (add meg százalékban is)! (1 stadium körülbelül 157,5 m.)
- Mi lehetett az oka annak, hogy Poszeidóniosz számítása ennyire eltért a ma már közismert értékektől?

Megjegyzés

Néhány évvel ezelőtt – német középiskolások kezdeményezésére – megismételték a mérést. A svájci és német diákok együttműködése alapján elkészült eredmény valamivel több mint 5% eltérést mutatott.)

2. Egy út egyik szakasza két téglalap alakú részből, és egy körgyűrű egy darabjából áll. (ld ábra). Bizonyítsd be, hogy az alakzat területe kiszámítható úgy is, hogy a középvonal hosszát megszorozzuk a sáv szélességével!



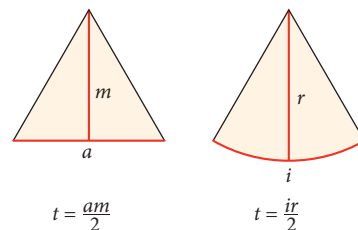
19 GYAKORLÁS

ELMÉLET

Az ívhosszat megadó $i = \frac{2r\pi\alpha}{360}$ és a körcikk területét megadó $t = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$ képletek jobb oldalán szereplő két törtben több közös tényezőt látunk. Ha az első törtet megszorozzuk r -rel és elosztjuk 2-vel, éppen megkapjuk a másodikat.

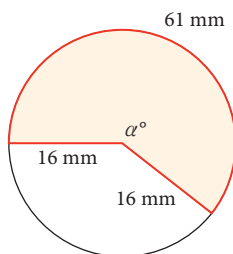
Ez azt jelenti, hogy $t = \frac{ir}{2}$, ami nagyon hasonlít a háromszög területképletéhez.

Ha például tudjuk, hogy egy 24 cm^2 területű körcikk egy 6 cm sugarú körben van, akkor ebből fejben is kiszámíthatjuk, hogy a hozzá tartozó ívhossz 8 cm .



KIDOLGOZOTT FELADAT

Mekkora középponti szög tartozik egy 16 mm sugarú körben a 61 mm hosszú körívhez? Mekkora az ugyanehhez a középponti szöghöz tartozó körcikk területe?



Megoldás

Ha a középponti szög α° -os és a körcikk területét t -vel jelöljük, akkor az ívhosszúság képlete szerint

$16\pi\alpha : 180 = 61$, $\alpha = 61 \cdot 180 : (16\pi) \approx 218$,
vagyis ez a középponti szög közelítőleg 218° -os.

A körcikk területe: $t = \frac{i \cdot r}{2} = \frac{61 \cdot 16}{2} = 488 \text{ (mm}^2\text{)}.$

FELADAT

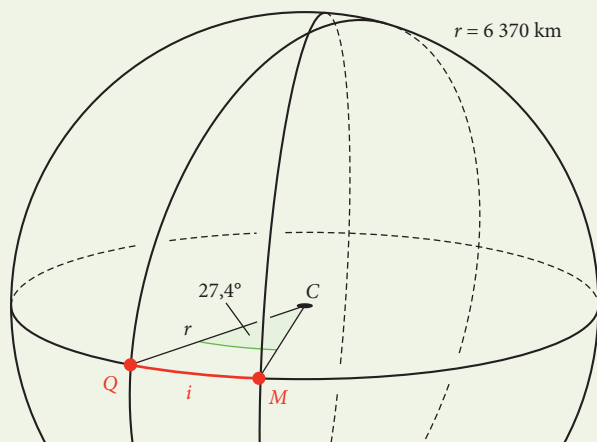
1. Egy $5,4 \text{ cm}$ sugarú körlemez a kör négy sugara olyan körcikkre bont, amelyek területének aránya

a) $5 : 8 : 1 : 4$;

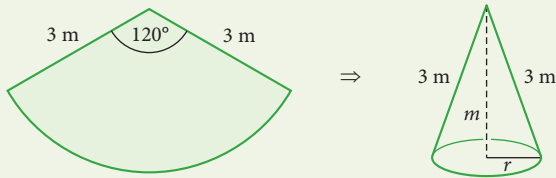
b) $2 : 3 : 4 : 5$.

Mekkora középponti szögek, mekkora körívek, mekkora körcikkek keletkeztek?

2. Körülbelül mekkora a Quito (Ecuador) és Macapá (Brazília) közti repülőút hossza? Mindkét város az Egyenlítő közelében fekszik, Quito a $78,5^\circ$ -os, Macapá pedig az $51,1^\circ$ -os nyugati hosszúsági körön.



3. Körcikk alakú ponyvából sátrat formázunk.

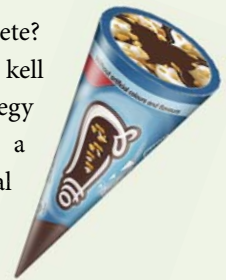


- Mekkora körív tartozik a ponyvához?
- Mekkora sugarú lesz a sátor alaplapja?
- Milyen magas lesz a sátor?

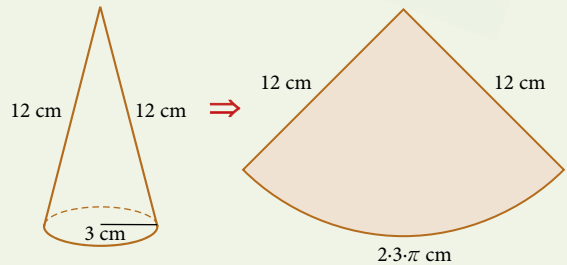


4. A csokis jégkrém olyan forgáskúp alakú tölcsérben árulják, amelynek alkotója 12 cm, alapkörének sugara 3 cm hosszú.

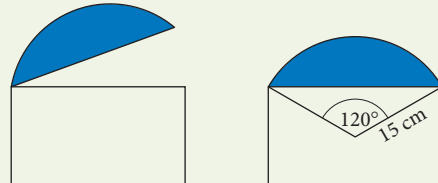
- Mekkora a kúppalást területe?
- Hány m^2 területű alufólia kell 500 db tölcsérhez, ha egy-egy fagyí becsomagolásához a palást területénél 35%-kal több fóliát használnak?



Útmutatás



5. Egy ládikó keresztmetszetének vázlata látható az ábrán, először nyitva, utána csukva. A felső vonal egy 120° -os középponti szöghöz tartozó körív. A kör sugara 15 cm.

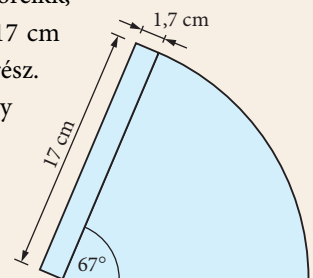


- Mekkora az ábrán a kék rész területe (mely a láda tetejéhez tartozik)?
- Mekkora a kék rész kerülete?

HÁZI FELADAT

1. Folytasd az órai 3. feladatot! Sátrat készítünk körcikk alakú ponyvából, a körcikk sugara 3 m. Milyen magas sátrak keletkeznének, ha a körcikk alakú ponyvák középponti szöge nem 120° -os, hanem
- 60° -os,
 - 90° -os,
 - 180° -os,
 - 240° -os,
 - 330° -os
- lenne? Melyik sátor lenne jó kutyaólnak, raktárnak, szálláshelynek?

2. A fagyitölcsér teljes beburkolásához szükséges fólia két részből tehető össze: egy 17 cm sugarú, 67° középponti szögű körcikk, és egy 1,7 cm széles, 17 cm hosszú téglalap alakú rész. Számítsd ki, hogy 10 000 db fagyí gyártásához hány m^2 fólia szükséges!



ELMÉLET

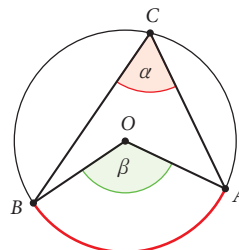
Kerületi szögek

Definíció

Az olyan konvex szöget, amelynek a csúcsa egy körvonalon van, a szárai pedig tartalmazzák a kör egy-egy húrját, erre a körre nézve **kerületi szögnek** nevezzük.

A kerületi szög a szóban forgó körnek arra az ívére támaszkodik, amely a szögtartományára illeszkedik.

Egy körben egy ívre egy középponti szög és végtelen sok kerületi szög támaszkodik.



Tétel (a középponti és kerületi szögek tétele)

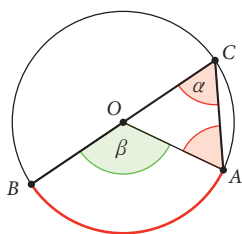
A középponti szög kétszer akkora, mint a vele azonos ívre támaszkodó bármelyik kerületi szög.

Bizonyítás

Egy kör középpontja háromféleképpen helyezkedhet el az AB ívre támaszkodó kerületi szögekhez viszonyítva:

- A) illeszkedik a kerületi szög egyik szárára;
- B) e szögtartomány belső pontja;
- C) a körlemeznek a szögtartományon kívüli részére illeszkedik.

E három esetre külön-külön bizonyítjuk be a tételt.



A) eset:

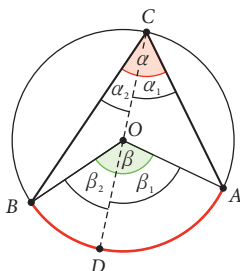
Az $AOC\triangle$ egyenlő szárú, ezért

$$CAO \sphericalangle = \alpha.$$

A β középponti szög az $AOC\triangle$ -nek külső szöge, ezért β a nem mellette fekvő két belső szög összegével egyenlő:

$$\beta = \alpha + CAO \sphericalangle = \alpha + \alpha.$$

$$\text{Tehát } \beta = 2\alpha.$$



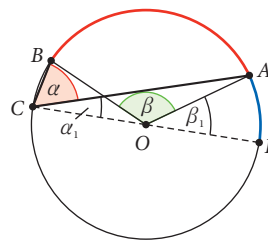
B) eset:

Az A) eset szerint az AD ívre nézve:

$$\beta_1 = 2\alpha_1 \text{ és a BD ívre nézve: } \beta_2 = 2\alpha_2.$$

$$\text{Tehát } \beta = \beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2,$$

$$\beta = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha.$$



C) eset:

Az A) eset szerint az AD ívre nézve:

$$\beta_1 = 2\alpha_1 \text{ és a BD ívre nézve:}$$

$$\beta + \beta_1 = 2(\alpha + \alpha_1) = 2\alpha + 2\alpha_1.$$

$$\text{Tehát } \beta + \beta_1 = 2\alpha + \beta_1, \text{ azaz } \beta = 2\alpha.$$

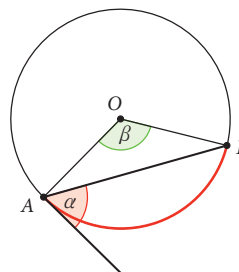
Az állítást mindhárom esetre bizonyítottuk, tehát igaz a középponti és kerületi szögek tétele.

Érintő szárú kerületi szögek

Definíció

Ha egy konvex szög csúcsa egy körvonalon van, az egyik szára illeszkedik e kör egy húrjára, másik szára pedig e kör egy érintőjére, akkor ezt **érintő szárú kerületi szögnek** nevezzük.

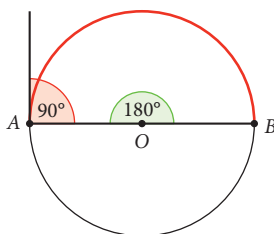
Az érintő szárú kerületi szög a szóban forgó körnek arra az ívére támaszkodik (az ábrán a pirossal jelölt AB ív), amely a szögtartományára illeszkedik. Egy körben egy ívre két érintő szárú kerületi szög támaszkodik (az ábrán a másik kerületi szög csúcsa a B pont).



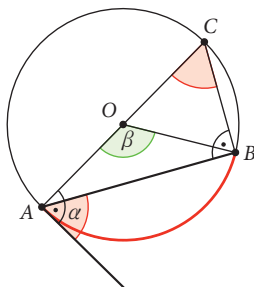
I. Tétel

Minden érintő szárú kerületi szög egyenlő a vele azonos ívre támaszkodó kerületi szögekkel.

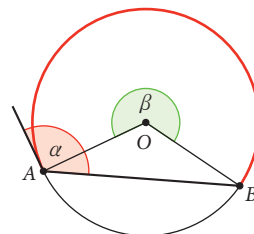
Bizonyítás



A) Ha az érintő szárú kerületi szög egy félkörre támaszkodik:
 $180^\circ = 2 \cdot 90^\circ$.



B) Az $ACB \sphericalangle$ és az α merőleges szárú hegyesszögek, ezért egyenlők (az A csúcsnál az érintő tulajdonsága, a B csúcsnál a Thalész-tétel miatt van derékszög).
 Tehát $\beta = 2 \cdot ACB \sphericalangle = 2\alpha$.



C) A B) eset alapján:
 $360^\circ - \beta = 2(180^\circ - \alpha) = 360^\circ - 2\alpha$,
 vagyis $\beta = 2\alpha$.

Az előző tétel értelmében így az érintő szárú és a többi kerületi szög egyenlő.

II. Tétel (a kerületi szögek tétele)

Egy körben vagy egyenlő sugarú körökben az egyenlő ívre támaszkodó kerületi szögek egyenlők.

Igaz ennek a tételnek a megfordítása is: egy körben az egyenlő kerületi szögekhez tartozó körívek egyenlő hosszúak.

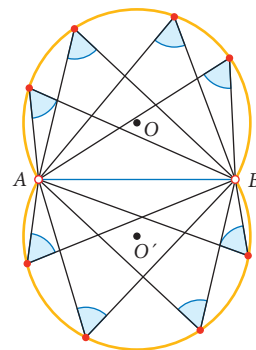
III. Legyen adott a síkon az AB szakasz és a konvex α szög. Keressük a sík azon pontjainak halmazát, amelyekből az AB szakasz α szögben látszik.

Tétel

A keresett ponthalmaz két olyan egybevágó körív pontjainak halmaza, amelyeknek A és B a végpontjai, és amelyek az AB egyenesére nézve egymás tükörképei. A ponthalmazhoz az A és a B pont nem tartozik hozzá.

Az így keletkezett ponthalmazt az adott szakaszhöz és az adott szöghöz tartozó látókörívnek is nevezzük (az ábrán narancssárgával rajzolt ívek).

Az AB szakasz a „látóköríven” belüli pontokból nagyobb, a rajta kívüli pontokból kisebb szögben látszik, mint a látókörív pontjaiból.



FELADAT

1. Vegyél fel egy derékszögű háromszöget, melynek befogói 8 cm és 10 cm hosszúak. Szerkeszd meg a háromszög belsejében azt a pontot, amelyből mindkét befogó 120° -os szögben látszik!
2. Egy hegyesszögű háromszög szögei legyenek α , β és γ . A háromszög körülírt köréhez húzz érintőket a háromszög csúcsaiban! Mekkora a keletkezett háromszögek szögei?
3. Geogebra program segítségével vizsgáld a következő feladatot:

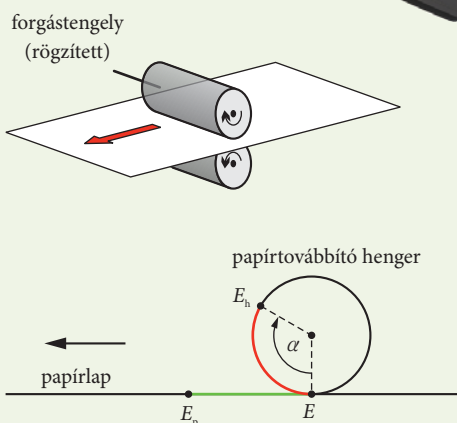
- Vegyél fel egy kört és benne egy, a körbe írt ABC háromszöget!
- Szerkeszd meg az ABC háromszög beírható körének K középpontját!
- Futtasd a C pontot az AB köríven! (Azon az íven, amelyen eredetileg is volt a C pont.)
- Milyen mértani helyet fut be a beírható kör K középpontja?
- Bizonyítsd be az állításodat!



Az ábrázolás megoldható a *GeoGebra* program segítségével is.

FELADAT

1. A mindennapok során gyakorta előforduló technikai feladat egy papírlap egyenletes mozgatása (például számítógéphez csatlakozó nyomtatók, pénztárgépek nyomtatóegységei, írógépek). A mechanikus megoldások igen egyszerű alapelven működnek: a papírtovábbítást forgó henger (hengerek) segítségével oldják meg. A papírlaphoz tapadó henger forgása közben mozgásba hozza („tolja”) a papírlapot.



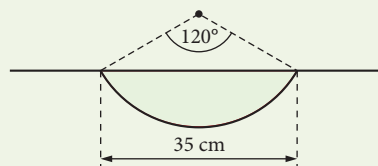
Ha a papírlap nem csúszik meg, akkor az EE_h ív hossza egyenlő az EE_p szakasz hosszával (előző ábra). A nyomtatókban a henger forgását elektronika szabályozza.

Egy nyomtatóban a papírtovábbító henger átmérője 15,6 mm. A papíron 10 kinyomtatott sor és 10 sorköz együtt 49 mm.

- a) Hány fokok szögelfordulásra ad parancsot az elektronika, ha egy sor kinyomtatásának befejezése után a következő sor nyomtatását kell megkezdeni?

- b) Az A/4-es papírlap hossza 297 mm. Hány fokat fordul el a papírtovábbító henger, amíg a teljes lapot továbbítja? Hány teljes fordulatot tett meg?
- c) Az első sor nyomtatásának megkezdésétől számítva hányadik sor legépelésekor lesz a papírtovábbító henger elfordulása összesen 540° ?
- d) Egy másik nyomtatóban a papírtovábbító henger átmérője 20,4 mm. Hány mm-rel tolta előre ez a henger a papírt, amíg 154° -ot fordult el? (A fent leírt elv alapján működnek még a szállítószalagok és a mozgólépcsők is. Ezeknél a továbbító henger állandó, egyenletes forgása a követelmény.)

2. Majd 100 éves paradicsompaszírozó látható a fényképen. Ennek a tartályát 24 cm széles, téglalap alakú, lyukacsos fémlapból hajlították úgy, hogy végül hengerfelületet formázzon.

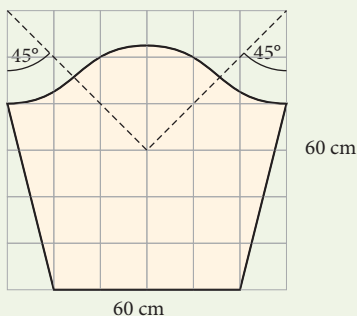


- a) Körülbelül hány centiméter hosszúságú téglalpra volt szükség az ábrán megadott méretű passzírozó szerkezet fémtestének kialakításához?
- b) Mekkora területű a passzírozónak a körszelet alakú oldalfala? (Ha egy körlemez egy egyenlő két részre vágunk, a részeket *körszeleteknek* nevezzük.)

3. A Föld Nap körüli keringésének pályáját közelítsük egy olyan 150 millió km sugarú körrel, amelynek középpontjában a Nap áll!

- Mekkora középponti szög tartozik ahhoz az ívhez, amelyet egy óra alatt befut a Föld?
- Mekkora ívet fut be egy óra alatt a Föld?
- Hány négyzetkilométer az egy óra alatt befutott ívhez tartozó körcikk területe?

4. Hajni egy $60\text{ cm} \times 60\text{ cm}$ -es, négyzet alakú szövetdarabra szabásmintarészletet tervezett. A mintát egyenes szakaszokból és 3 körívből szerkesztette.



- Hány százalék hulladék keletkezik, ha kivágja a mintát az anyagból?
- Hajni be akarja szegni ezt a darabot. Hány cm-t kell beszegnie?



HÁZI FELADAT

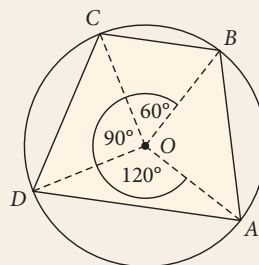
1. Egy híd egyik vége rögzítve van, másik vége két egyenlő sugarú hengeren nyugszik. A hőmérséklet változásakor a híd hossza változik. Hány fokkal fordulnak el a $12,4\text{ cm}$ átmérőjű görgők, ha a híd hossza hőtágulás miatt 8 cm -rel megnő?



2. A Hold pályáját közelítsük egy Föld középpontú, 384 ezer km sugarú körrel! A Hold keringési ideje $27,3$ nap.

- Mekkora középponti szög tartozik ahhoz az ívhez, amelyet egy óra alatt befut a Hold?
- Mekkora ívet fut be egy óra alatt a Hold?
- Hány négyzetkilométer az egy óra alatt befutott ívhez tartozó körcikk területe?

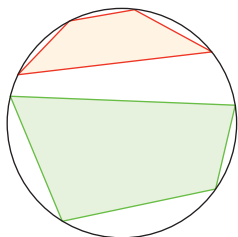
3. Egy 250 cm^2 területű körlapból az ábra szerint kivágtuk az $ABCD$ négyszöget.



- Mekkora a négyszög területe?
- Hány százalék hulladék keletkezett?
- Igazold, hogy az $ABCD$ négyszög trapéz!

ELMÉLET

A húrnégyszögek



Definíció

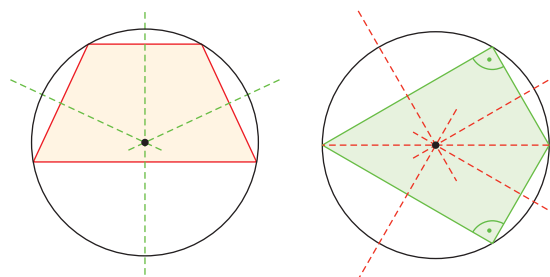
Azt a négyszöget, amelyhez található mind a négy csúcsára illeszkedő kör, **húrnégyszögnek** nevezzük.

Megjegyzés: a húrnégyszög oldalfelező merőlegesei egy pontra illeszkednek, ez a közös pont a húrnégyszög körülírt körének középpontja.

Például

a speciális négyszögek közül húrnégyszög

- minden olyan tengelyesen szimmetrikus trapéz, amelynek szimmetriatengelye az alapokra merőleges, köztük a téglalapok is,
- minden derékszögű deltoid.

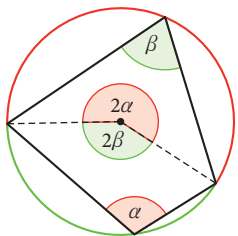


Tétel (a húrnégyszögek tétele)

Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha két-két szemközti szögének az összege 180° .

Bizonyítás

E tétel egy szükséges és elégséges feltétel, ezért két állítást tartalmaz, ezek egymás megfordításai.



1. állítás

A húrnégyszög két szemközti szögének az összege 180° .

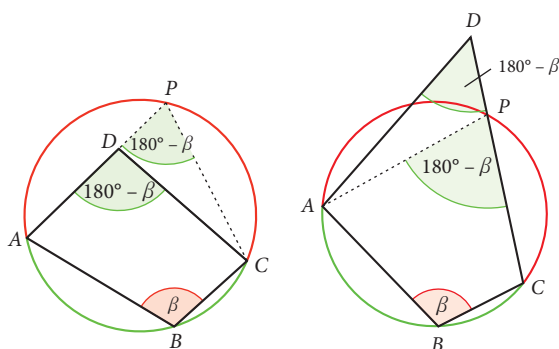
Az ábra jelöléseivel: $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$, ezért a középponti és kerületi szögek összefüggése miatt $\alpha + \beta = 180^\circ$.

2. állítás

Ha egy síknégyszög két szemközti szögének az összege 180° , akkor ez húrnégyszög.

A feltétel miatt a négyszög konvex. Legyen az $ABCD$ négyszög esetében $\beta + \delta = 180^\circ$, vagyis $\delta = 180^\circ - \beta$. Azt kell bebizonyítanunk, hogy D illeszkedik az ABC háromszög köré írt körre.

D nem lehet a körön belül sem és a körön kívüli síkrészben sem, mert mindkét esetben olyan háromszög keletkezne (az ábrákon a $CDP\triangle$, illetve az $ADP\triangle$), amelynek egy külső szöge (az 1. állítás következtében) egyenlő lenne az egyik nem mellette fekvő belső szögével. Ilyen háromszög nincs, tehát D a körön van.



Az érintőnégyyszögek

Definíció

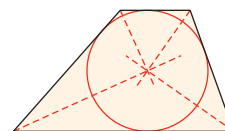
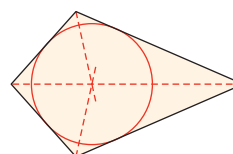
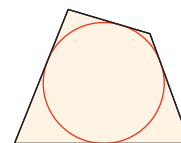
Azt a négyszöget, amelyhez található mind a négy oldalát érintő kör, **érintőnégyyszögnek** nevezzük.

Megjegyzés

Az érintőnégyyszög olyan konvex négyszög, amelynek belső szögfelezői egy pontra illeszkednek. A szögfelezők közös pontja a négyszög beírt körének középpontja.

Például

a speciális négyszögek közül érintőnégyyszög minden konvex deltoid (közük a rombuszok is), de található érintőnégyyszög a trapézok között is.

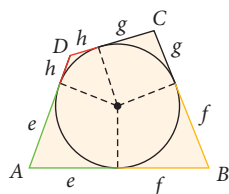


Tétel (az érintőnégyyszögek tétele)

Egy konvex síknégyszög akkor és csakis akkor érintőnégyyszög, ha két-két szemközti oldalának az összege egyenlő.

E tétel két állítást tartalmaz, ezek egymás megfordításai.

1. állítás: Ha egy négyszög érintőnégyyszög, akkor két-két szemközti oldalának az összege egyenlő.
2. állítás: Ha egy konvex síknégyszög két-két szemközti oldalának az összege egyenlő, akkor ez érintőnégyyszög.



Bizonyítsuk be az 1. állítást!

Felhasználjuk azt a tételt, hogy **körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok hossza egyenlő**. E tételnek megfelelően az ábrán az A-ból, a B-ből, a C-ből, illetve a D-ből induló érintőszakaszok hosszát e -vel, f -fel, g -vel, illetve h -val jelöltük.

Az ábráról leolvasható, hogy az AB és a CD oldal hosszának az összege: $(e + f) + (g + h)$, a BC és az AD oldal hosszának az összege: $(f + g) + (h + e)$, vagyis igaz a vizsgált állítás.

Bizonyítsuk be a 2. állítást!

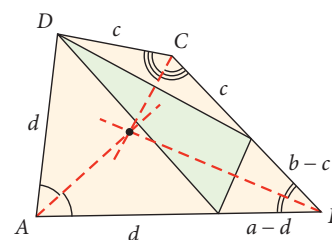
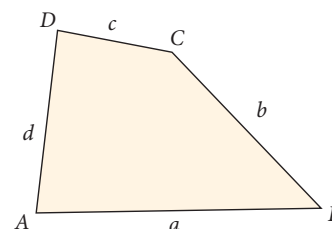
Az $ABCD$ konvex négyszögben legyen (az ábra szerint) $a + c = b + d$. Két eset van.

Első eset: $a = d$. Ekkor $a + c = b + d$ miatt $b = c$ is igaz, tehát a négyszög egy konvex deltoid. A konvex deltoidnak van beírt köre, tehát az állítás ebben az esetben igaz.

Második eset: $a \neq d$; legyen pl. az ábra szerint $a > d$. Ekkor $c < b$ is igaz, ellenkező esetben ugyanis nem teljesülhetne, hogy $a + c = b + d$.

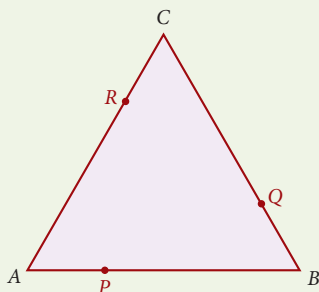
Ha a d és a c hosszúságú szakaszt az ábra szerint felmérjük az AB , illetve a BC oldalra, és a kapott pontokat egymással meg a D ponttal összekötjük. Az $ABCD$ négyszög konvex, ezért ezt most négy háromszögre bontottuk. Közülük a három „külső” egyenlő szárú, hiszen $a + c = b + d$ miatt $a - d = b - c$ is igaz. A „belső” háromszöget a három egyenlő szárú háromszögnek az alapjai határolják.

Rajzoljuk meg a három egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelyét! Ezek a „belső” háromszög oldalfelező merőlegesei, ezért egy pontban metszik egymást. Ez a három egyenes azonban egyúttal az adott négyszög egy-egy szögfelezője is, tehát az $ABCD$ négyszög három szögfelezője egy pontban metszi egymást. A szögfelezők tulajdonsága miatt ez a közös pont egyenlő távol van a négyszög négy oldalától. E pont körül tehát lehet olyan kört írni, amely a négyszög oldalait érinti. A vizsgált állítás tehát ebben az esetben is igaz, a bizonyítást befejeztük.



FELADAT

1. Egy 7 cm oldalú szabályos háromszög minden oldalát osszuk 2:5 arányban két részre az ábra szerint.



Kösd össze az osztópontokat!

- a) Igazold, hogy az ábrán keletkezik három egybevágó háromszög! Melyik egybevágósági alapesetet lehet alkalmazni?
- b) Igazold, hogy PQR háromszög szabályos!
2. Az $ABCD$ téglalapnak meghúztuk az AC átlóját. A másik két csúcsból merőlegest állítottunk az AC átlóra. Így az átlót három részre vágtuk, ezek a részek 2 cm, 3 cm és 2 cm hosszúak.
- a) Készíts ábrát!
- b) Milyen messze van B csúcs az AC átlótól?
- c) Mekkora a téglalap oldalai?
3. Az AB szakasz hossza 10 cm. A szakaszt a P pontja úgy vágja ketté, hogy AP hossza 2 cm.
- a) Elkészítjük azt a derékszögű háromszöget, melynek átfogója AB , és magassága az AP és PB szakaszok számtani közepe. Mekkora a befogók?
- b) Elkészítjük azt a derékszögű háromszöget, melynek átfogója AB , és magassága az AP és PB szakaszok mértani közepe. Mekkora a befogók?
- c) Szemléltesd egy közös ábrán ezt a két háromszöget!

4. Használd földgömböt!

A Földön a Baktérítő sugara körülbelül 5860 km. Körülbelül mekkora utat tesz meg az az óceánjáró az Atlanti-óceánon, amely Rio de Janeiróból indulva a Baktérítő mentén haladva eljut Namíbiába? (Rio de Janeiro a 42° -os nyugati hosszúsági kör közelében fekszik, a Baktérítő a namíbiai partot a 14° -os keleti hosszúsági kör közelében éri el.)

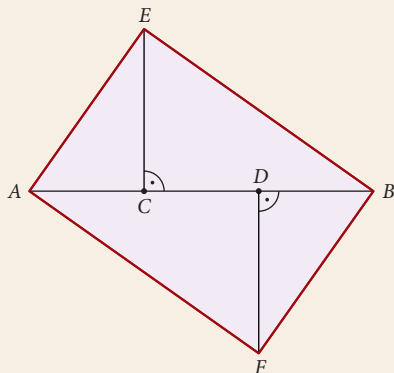


5. Egy kert alakja szimmetrikus trapéz. Ennek rövidebbik alapja és a szárai is 32 m hosszúak, hosszabbik alapja 36 m. A kertnek mind a négy sarkába elhelyezünk egy-egy locsoló berendezést, amely 16 m sugarú körcikk locsolására képes.
- a) A kert hány százalékát tudjuk így meglocsolni?
- b) Sajnos az a két locsoló, amelyek a hosszabbik alapra illeszkedő sarkokon van, meghibásodik. Ekkor mekkora területet tudunk öntözni a másik két locsolóval? (a trapéz hosszabbik alapon fekvő szögei körülbelül $86,5^\circ$ -osak.)



HÁZI FELADAT

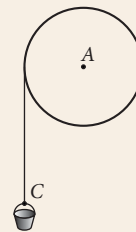
- 1** Egy 9 cm hosszú AB szakasznak a harmadoló pontjai legyenek C és D . Állítsunk merőlegest C -ben és D -ben a szakaszra, és mérjük fel ugyanazt a távolságot a merőlegesre, de a szakasz különböző oldalán.



- a) Mekkora távolságot mérünk fel, hogy a kapott E, F pontok és a szakasz végpontjai egy téglalapot határozzanak meg?
b) Mekkora a téglalap oldalai?

- 2** Egy 84 cm átmérőjű hengerre tekerünk fel egy kötelet, amin egy vödör lóg. (A henger a tengelyénél van rögzítve.)

- a) Mennyivel emeltük fel a vödört, ha a henger 210° -ot fordult el közben?
b) Mekkora szöggel kell elfordítani a hengert, hogy a vödör két méterrel emelkedjen följebb?



- 3** Egy körcikkből kúp alakú süveget hajtunk. Az elkészült kúp alapkörének kerülete 46 cm, magassága 36 cm.

- a) Mekkora sugarú körből származik a körcikk?
b) Mekkora középponti szög tartozik a körcikkhez?
c) A süveget csillámpapírral borítjuk. Hány cm^2 csillámpapír kell a borításhoz, ha a veszteségek miatt 15% kal több anyagot számolunk, mint a kúp palástjának a területe?

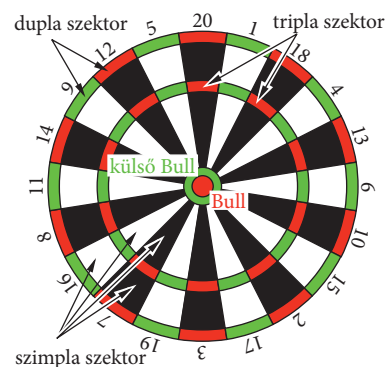
RÁADÁS

- 1** Részlet a dartsjáték szabályzatából (a darts angol eredetű játék és sport, melynek során apró nyilakat dobnak egy kör alakú céltábla különböző pontértékű szektoraira): „A dartstábla méretei a következők legyenek: a dupla és a tripla gyűrűk szélességének mérete 8 mm, a 25 pontot érő külső Bull nevű gyűrű átmérője 31,8 mm, az 50 pontot érő körlap, a Bull átmérője 12,7 mm. A dupla gyűrű külső széle a középpontig 170 mm. A tripla gyűrű külső széle a középpontig 107 mm ...”

- a) Hány mm^2 a „Bull's eye” (röviden: „Bull”), illetve a „külső Bull” területe? („Bull's eye” angolul „bikaszemet” jelent.)
b) Hány mm^2 az egyes körcikk területe?
c) Hány mm^2 egy dupla szektor, illetve egy tripla szektor területe?
d) Hány mm^2 a szimpla szektor területe a dartstáblán?
e) Írd fel a teljes dartstábla területének felosztását a következő módon, minden területet mm^2 -ben mérve!

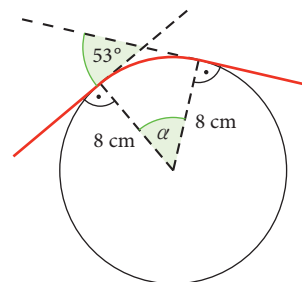
$$T_{\text{Bull}} + T_{\text{külső Bull}} + T_{\text{szimpla szektorok}} + T_{\text{dupla szektorok}} + T_{\text{tripla szektorok}}$$

Számítsd ki, hogy az egyes területek mekkora részei a dartstábla területének!



- 2** Egy elektromosan töltött részecske egyenes vonalú pályán halad. A részecskét mágneses mezőn vezetik át, ahol egy 8 cm sugarú köríven halad tovább. A megfelelő pillanatban a mágneses mezőt megszüntetik, így a részecske ismét egyenes vonalú pályára tér (ábra). Így végül a részecske az eredeti haladási irányától 53° -os szögben térül el.

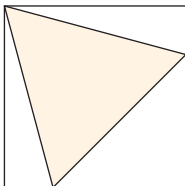
- a) Mutasd meg, hogy $\alpha = 53^\circ$!
b) Számítsd ki, mekkora a töltött részecske mágneses mezőben megtett útjának hossza!
c) Számítsd ki a 8 cm sugarú kör 53° -os középponti szögű körcikkének területét!



TUDÁSPRÓBA I.

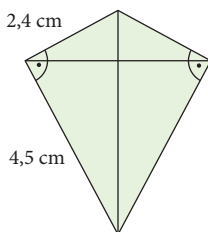
1. Egy negyedkör területe $36,1 \text{ cm}^2$. Mekkora körív tartozik ebben a körben egy 117° -os középponti szöghöz?

2. Az ábrán megadott háromszögnek mindegyik oldala 5 cm -es, csúcsai rajta vannak a négyzet területén. Bizonyítsd be, hogy a négyzetből levágott 3 háromszög közül kettő egybevágó, a harmadik pedig egyenlő szárú!

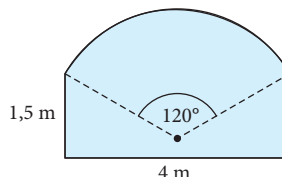


3. Egy derékszögű deltoid oldalainak hosszúsága $4,5 \text{ cm}$ és $2,4 \text{ cm}$.

- a) Mekkora a területe?
b) Mekkora a hosszabbik átlója?
c) Mekkora a rövidebb átlója?
d) Mekkora részekre vágják egymást az átlók?

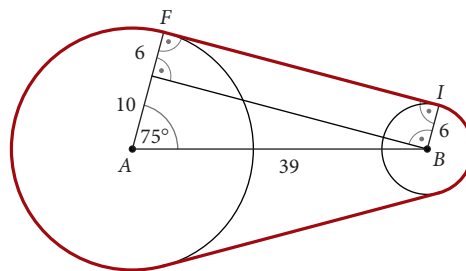


4. Az ábrán egy fóliasátor keresztmetszetének tervét látod. (A téglalap fölötti ív egy teljes körív harmada.)



Elég-e az előlap lefedésére a 4 méter széles fóliából $2,2 \text{ méter}$?

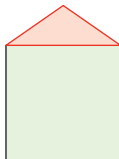
5. Egy szíj áttétel vázlatát láthatod az ábrán. A körök középpontjainak távolsága: $AB = 39 \text{ cm}$. A nagyobbik kör sugara: $AF = 16 \text{ cm}$. A kisebbik kör sugara: $BI = 6 \text{ cm}$.
- a) Milyen hosszúak a szíj íves darabjai?
b) Milyen hosszúak a szíj egyenes darabjai?
c) Milyen hosszú a szíj?



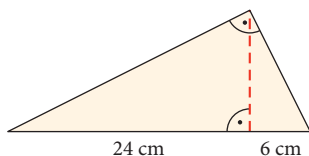
TUDÁSPRÓBA II.

1. Egy negyedkör területe $36,1 \text{ cm}^2$. Mekkora középponti szög tartozik ebben a körben egy 7 cm -es körívhez?

2. Egyenlő szárú háromszöget helyeztünk a négyzetre. Bizonyítsd be, hogy a háromszög „felső” csúcsa egyenlő távol van a négyzet két „alsó” csúcsától!

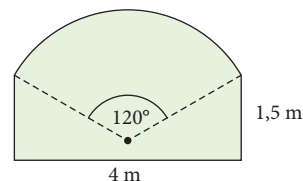


3. Egy derékszögű háromszög magassága az átfogót 6 cm -es és 24 cm -es részekre osztja.

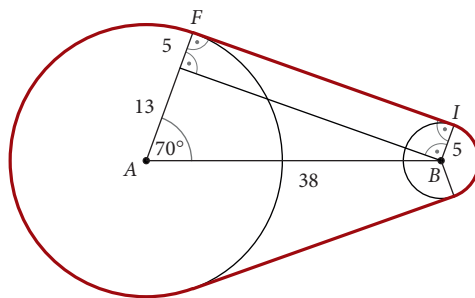


- a) Mekkora ez a magasság?
b) Mekkora a nagy háromszög befogói?
c) Hogy aránylik egymáshoz a három derékszögű háromszög területe?

4. Az ábrán egy fóliasátor keresztmetszetének tervét látod. (A téglalap fölötti ív egy teljes körív harmada.) A fóliasátor 6 méter hosszú lesz. Leborítható-e a sátor 6 méternyi 8 méter széles fóliával?



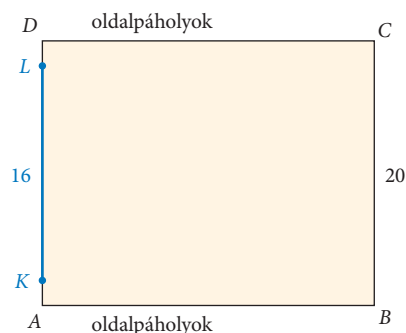
- 5 Egy szíj áttétel vázlatát láthatod az ábrán.
A körök középpontjainak távolsága: $AB = 38$ cm.
A nagyobbik kör sugara: $AF = 18$ cm.
A kisebbik kör sugara: $BI = 5$ cm.
- Milyen hosszúak a szíj íves darabjai?
 - Milyen hosszúak a szíj egyenes darabjai?
 - Milyen hosszú a szíj?



EMELT SZINT

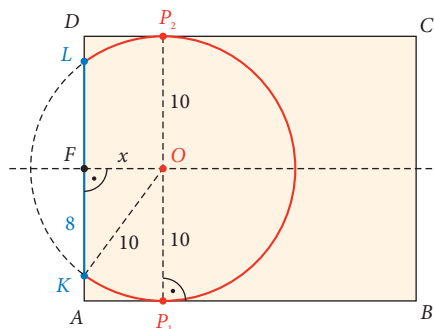
FELADAT

Melyik oldalpáholyból lehet legnagyobb szögben látni az ábrán megadott (téglalap alapú) moziteremben a 16 m széles vetítövásznat?

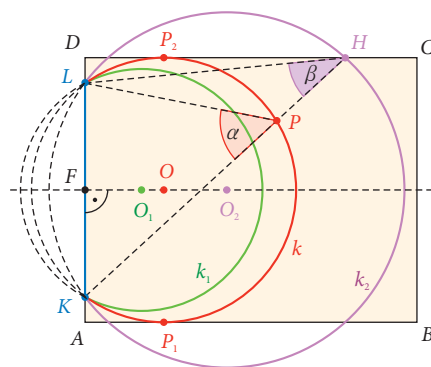


Megoldás

A 16 méteres vetítövászonhoz (KL) mint húrhoz azt a legkisebb kört kell megkeresnünk, amelynek van pontja a terem AB (és CD) oldalán. E kör átmérője 20 m, a keresett páholy és az AD oldal távolságát az OFK háromszögből a Pitagorasz-tétellel kapjuk meg: $x = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$, vagyis az AB oldalon a legjobb páholy (P_1) 6 m-nyire van az A ponttól, illetve a CD oldalon (P_2) a D ponttól.



Ha a piros k kör helyett a nála kisebb sugarú k_1 -et vennénk (ábra), akkor a rajta lévő „páholyok” nem érnék el a falat. Ha pedig nagyobb lenne a kör (k_2), akkor a CD páholy-sorral való metszéspontjaiból (pl. H -ből) kisebb szögben látszana a mozivászon, mint P_2 -ből (az LPH háromszögnek külső szöge α , így $\beta < \alpha$).



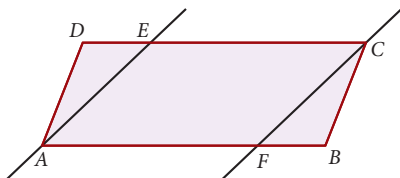
TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Egy háromszög csúcsai legyenek A , B és C . Rajzold meg az A csúcsból a belső szögfelezőt. Ennek a BC oldallal való metszéspontja legyen M . M -nek az AB oldalegyenesre eső merőleges vetülete legyen P , az AC oldalegyenesre eső merőleges vetülete legyen Q .

a) Készíts ábrát!

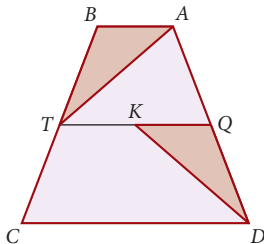
- b) Bizonyítsd be, hogy AMP háromszög egybevágó az AMQ háromszöggel! A háromszögek egybevágóságának melyik alapesetét lehet alkalmazni?

2. Az $ABCD$ paralelogramma két szemközti csúcsán húzzunk két, egymással párhuzamos egyenest, az ábra szerint. Bizonyítsd be, hogy az AED háromszög egybevágó a BCF háromszöggel!

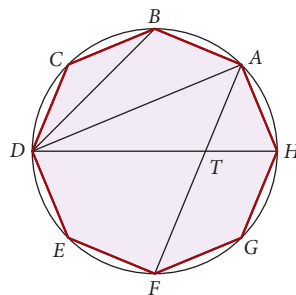


- a) A háromszögek egybevágóságának melyik alapesetét lehet alkalmazni?
- b) Melyik egybevágósági transzformáció viszi egymásba a két háromszöget?

3. Egy szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja háromszor akkora, mint a rövidebbik alapja. Megrajzoltuk a trapéz középvonalát, ennek a szárakkal való metszéspontjai T és Q , a TQ szakasz felezőpontja pedig K . (ld ábra) Bizonyítsd be, hogy az ABT háromszög egybevágó a DQK háromszöggel! A háromszögek egybevágóságának melyik alapesetét lehet alkalmazni?



4. Egy szabályos nyolcszögnek behúztuk néhány átlóját.
- a) Bizonyítsd be, hogy az ABD háromszög egybevágó az ATD háromszöggel!



- b) Igazold, hogy az ATH háromszög és a TDF háromszög egyenlőszárú!

5. Egy derékszögű háromszög átfogóját az átfogóhoz tartozó magasság 3 cm és 7 cm hosszú részekre vágja.

a) Mekkora az átfogóhoz tartozó magasság?

b) Mekkora a befogók?

6. Egy derékszögű háromszögben az egyik befogó 3 cm, ennek a befogónak az átfogóra eső vetülete 2 cm.

a) Mekkora az átfogóhoz tartozó magasság?

b) Mekkora a másik befogó átfogóra eső merőleges vetülete?

c) Mekkora a háromszög többi oldala?

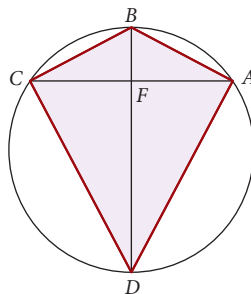
7. Egy téglalap egyik átlójára merőlegest bocsájtunk a másik átló két végpontjából. Ezek talppontjai az átlót 3 cm, 2 cm, 3 cm hosszú darabokra osztják.

a) Készíts ábrát!

b) Milyen messze van az átló a másik két csúcstól?

c) Mekkora a téglalap oldalai?

8. Az ábrán egy körbe írható deltoidot láthatsz. Az átlók metszéspontja 4 cm, illetve 7 cm messze van a deltoid egy-egy csúcsától.



- a) Milyen messze van az átlók metszéspontja a másik két csúcstól? (Hány eset lehetséges?)
- b) Mekkora a deltoid oldalai?
- c) Mekkora a deltoid területe?

9. Egy derékszögű háromszög egyik befogója háromszorosa a másik befogónak. Milyen arányban osztja ketté az átfogót a hozzá tartozó magasság?

10. Szerkeszd meg a $\sqrt{11}$ hosszúságú szakaszt az egység hosszú szakasz ismeretében!

11. Adott egy hosszabb és egy rövidebb szakasz. A hosszabb szakaszból tudjuk, hogy a és b szakaszok számítani közepe. A rövidebb szakaszból tudjuk, hogy a és b szakaszok mértani közepe. Szerkeszd meg a és b szakaszokat!

12. Egy kör sugara 12 cm.

- a) Milyen hosszú a 42° -os középponti szöghöz tartozó körív?
- b) Mekkora a 72° -os középponti szöghöz tartozó körcikk területe?

13. Egy 8 cm sugarú körvonalat 1 : 2 : 3 : 4 arányban négy részre osztjuk.

- a) Mekkora középponti szögek tartoznak az egyes ívekhez?
- b) Milyen hosszúak az egyes körívek?
- c) Készíts ábrát!

14. A 32 cm átmérőjű pizzából mekkora terület az a szelet, amelyhez 100° -os középponti szög tartozik?

15. Egy kör alakú szerencsekerék sugara 36 cm. A körlap 17 körcikkre van felosztva. Felváltva 23° -os és 20° -os körcikkek követik egymást négyszer, a 23° -os körcikkek „Nem nyert”, a 20° -os körcikkek „Nyert” felirattal. Az utolsó, kilencedik körcikk felirata: „Pörgess újra!”.

- a) Készíts ábrát!
- b) Mekkora az egyes körcikkek területe?
- c) Mennyi az esélye, hogy az első pörgetés után nyer valaki?

16. Az Ugandai főváros, Kampala az egyenlítő közelébe esik, körülbelül a $29,7^\circ$ -os keleti hosszúsági körre. Ugyancsak az egyenlítő közelében fekszik a Kongói

Demokratikus Köztársaság Butembo városa, a $17,8^\circ$ -os keleti hosszúsági körön. Légvonalban mekkora a távolságuk? (a Föld sugara 6370 km)

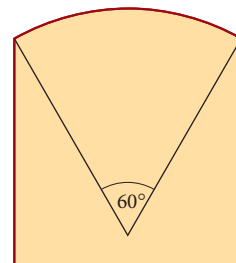
17. Egy 25 cm sugarú körlapból kivágunk egy 205° -os középpontú szögű körcikket. Ebből a körcikkből kúppalástot hajtunk.

- a) Mekkora a körcikk kerülete?
- b) Mekkora a keletkező kúp alapkörének kerülete és sugara?
- c) Mekkora a kúp magassága?

18. Egy kúp alakú játszó sátor 1,75 m magas. Az alapkörének a sugara 65 cm.

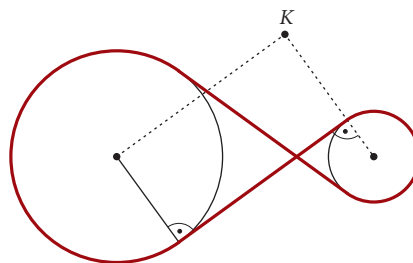
- a) Mekkora sugarú körből származik az a körcikk, amelyből a palástját hajtották?
- b) Mekkora ennek a körcikknek a középponti szöge?
- c) Mennyi vászon kell a palást elkészítéséhez?
- d) Ha 30% ráhagyással számolunk, akkor az 1,40 m széles anyagból hány méternyit kell vennünk a palásthöz?

19. Egy kertkapu formáját úgy alakították ki, hogy egy négyzet alakra egy 60° -os középponti szögű körívet illesztettek. A négyzet oldalai 1,4 m hosszúak.



- a) Milyen magas a kertkapu?
- b) Mekkora a kertkapu (belső) felülete?

20. Egy szíj áttételt látsz az ábrán.



A körök középpontjaiban vannak a tengelyek, ezek távolsága 68 cm.

A nagyobbik kör sugara 28 cm, a kisebbik kör sugara 12 cm.

A hajtószíjak keresztbe mennek, így megfordítják a forgás irányát. Középen a hajtószíjak (és a közös érintők) szöge 72° . Milyen hosszú a szíj?

CSOPORTMUNKA

1. Egy rendezvényen egymáshoz kapcsolható, egyforma kordon-elemekkel kerítnek el egy téglalap alakú részt. 20 kordon kerítés elemük van, egyenként 2,3 m szélesek.

- a) Mekkora lehet az elkerített rész területe, ha minden oldalát kerítés-elem határolja? Töltsétek ki a táblázatot! A füzetbe dolgozzatok!

Szélesség (m)	2,3	4,6	6,9						
Hosszúság (m)	20,7								
Terület (m ²)	47,6								

Melyik esetben lesz az elkerített rész területe a legnagyobb?

Legyen a szélesség x (m), területe T (m²). Hogyan számolható ki T , ha ismerjük x -et?

- b) Vegyük egység hosszúságnak egy kerítéselem hosszát, és területegységnek az egy kerítéselem oldalú négyzet területét! Hogyan alakul ekkor a táblázat?

Szélesség	1	2							
Hosszúság	9								
Terület	9								

- c) Mekkora lehet az elkerített rész területe, ha egyik oldalról egy épület fala lesz a téglalap oldala, oda nem kell kerítés?

Szélesség									
Hosszúság									
Terület									



Melyik esetben lesz az elkerített rész területe a legnagyobb?

Hogyan számolható ki a szélességből a terület?

Hogyan számolható ki a hosszúságból a terület?

- d) Mekkora lehet az elkerített rész területe, ha egy sarokhoz illesztjük: két szomszédos oldala egy-egy fal lesz, oda nem kell kerítés?

[illegible]

Melyik esetben lesz az elkerített rész területe a legnagyobb?

Hogyan számolható ki a szélességből a terület?

Hogyan számolható ki a hosszúságból a terület?

- 2.®** A világbajnokság után egy darabig még jó áron lehet adni a szurkolói mezeket, de egy év elmúltával már nincs rá nagy kereslet.

Egy boltvezető ezért úgy dönt, hogy leárazást hirdet. Egy póló ára eddig 4000 Ft volt. De most annyszor 200 Ft-tal olcsóbban adná, ahány pólót vesz tőle a vásárló. Az alkalmazottjai azonban közbeszólnak:

- Ez így még nem lesz jó, mert ha például 15 pólót vennék, akkor kevesebbet fizetnék, mintha 10 pólót.
- Ez is igaz, de leginkább az a baj ezzel, hogy mindenki ingyen vinné a pólókat.

- a)** Ellenőrizték, jól számolt-e az első alkalmazott: mennyit fizetnének 15, és mennyit 10 pólóért?

- b)** Mire gondolhatott a második alkalmazott?

- c)** Készítsetek matematikai modellt a feladathoz:

- Jelöljétek x-szel a vásárolt pólók számát! Mennyi lesz x függvényében az egységár?

- Mennyit fizetnénk?

- Ábrázoljátok a függvényt! Az értelmezési tartomány legyen a 20-nál kisebb pozitív egész számok halmaza.

- d) Hogyan érdemes változtatni az akción? A boltvezető azt szeretné, hogy ha valaki több pólót vesz, akkor kevesebbet fizessen darabjáért, ugyanakkor mindegyikért kapjon legalább 1500 Ft-ot. Készítsetek javaslatot (esetleg többet is) a leíráshoz! Ábrázoljátok ezt is grafikonon!



HÁZI FELADAT

- 1**  Egy bolt x darab újraírható, akciós árú DVD-lemezt $[(x - 3)^2 + 7] \cdot 100$ forintért árul. Legfeljebb 10 lemezt vásárolhatunk egyszerre, azaz $0 \leq x \leq 10$.
(Ha nem vásárolunk, nem fizetünk!)

- a) Mennyit kell fizetnünk 1, 3, illetve 10 akciós lemez megvásárlása esetén?

- b)** Hány lemez vásárlása esetén fizetjük a legkevesebbet? Ez a „legjobb vétel”? Érvelj az állításod mellett!

- c) 3 lemez vásárlása esetén az egységár

$$\frac{700}{3} \approx 233 \text{ Ft, míg 10 lemez vásárlása esetén}$$

$$\frac{5600}{10} = 560 \text{ Ft.}$$

Hány lemez vásárlása esetén lesz a legkisebb a megvásárolt lemezek egységára? Ez a „legjobb vétel”?

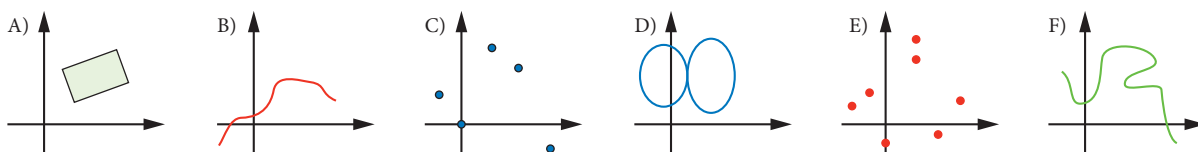
- d)** Milyen módon lehet sok lemezt megvásárolni a lehető legalacsonyabb egységáron?

ISMÉTELJÜNK

1. Adj meg egy olyan függvényt, melynek

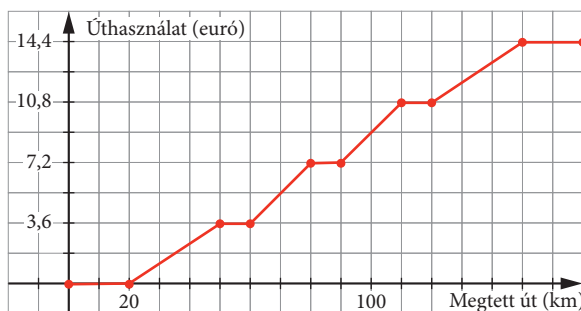
- a) értelmezési tartománya a pozitív számok halmaza, képhalmaza a negatív számok halmaza;
- b) értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékkészlete a $\{-1; -2\}$ halmaz!

2. a) A színes ponthalmazok közül melyek függvénygrafikonok, és melyek nem?



b) Rajzolj két olyan grafikont, amely nem függvénygrafikon, és két olyat, amelyik függvénygrafikon! Cseréld ki a társaddal a rajzokat, és ellenőrizték egymás válaszána helyességét!

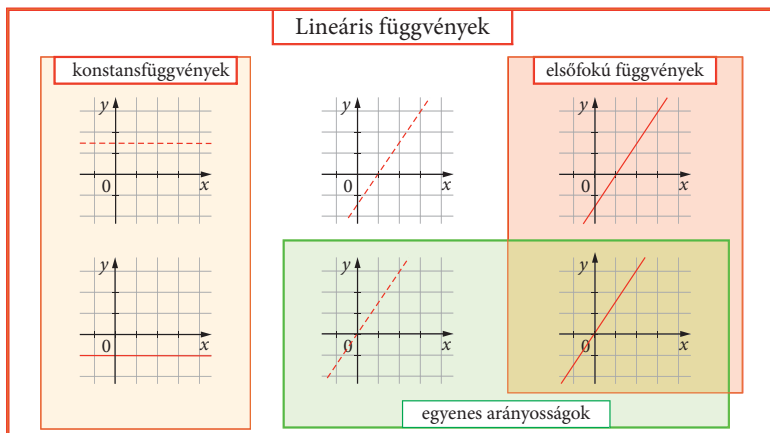
3. Egy olaszországi matematikai konferencia résztvevői egy egyetemi városba utaztak előadást tartani. Autóval mentek, oda és vissza ugyanazon az útvonalon. A közutak ingyenesen használhatók, az autópályákon azonban fizetni kell, mégpedig a megtett úttal egyenesen arányosan (Olaszországban az autópályák különböző üzemeltetők kezében vannak, a kilométerenként fizetendő díjak nem egyformák). A grafikon az úthasználat költségét mutatja euróban, az indulástól a hazaérkezésig.



- a) Milyen messze volt a konferencia helyszínétől az egyetemi város?
- b) Hány kilométert tettek meg autópályán?
- c) Hogyan látható a grafikonról, hogy drágább és olcsóbb autópálya-szakaszon is autóztak?
- d) Mennyit fizettek összesen a drágább autópályán?
- e) Mennyibe kerül 100 km az olcsóbb és mennyibe a drágább autópályán?
- f) Mennyi úthasználati díjat fizettek összesen az autós kirándulásért?

4. Add meg azt az elsőfokú függvényt, amely -1-hez 5-öt, 3-hoz 3-at rendel!

- a) Ábrázold a függvényt!
- b) Mi az értelmezési tartománya?
- c) Mi az értékkészlete?
- d) Írd fel a hozzárendelési szabályt!



- a) Ismételjük át a lineáris függvényekről tanultakat a halmazábra alapján!
- b) Igazak-e az alábbi kijelentések?
- Ha egy lineáris függvény **értelmezési tartománya a valós számok halmaza**, akkor **a grafikonja egyenes**.
 - Ha egy lineáris függvény grafikonja egyenes, akkor az állandó függvény vagy elsőfokú függvény.
 - Az egyenes arányosság grafikonját egy origóra illeszkedő egyenes pontjai alkotják.
 - Az $x \mapsto -2x + 3$ elsőfokú függvény grafikonjának meredeksége -2 .
 - Van olyan lineáris függvény, amelyik nem elsőfokú függvény.

HÁZI FELADAT

1. Alkoss két igaz és két hamis kijelentést a fenti 5. feladat halmazábrájához kapcsolódva! Kezdődjenek így az állítások: „Van olyan ...”, „Minden ...”, „Nincs olyan ...”, „Nem minden ...”.

2. Megadtunk hat függvényt:

Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) = 3x$;
 Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $g(x) = -6$;
 Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $h(x) = 3x - 2$;
 Minden $x \in \mathbb{Z}$ esetén $k(x) = 3x$;
 $D_l = \{2\}$ és $l(x) = 4$;
 $D_m =]1; 4[$ és $m(x) = 3x - 2$.

Válaszoljatok a kérdésekre a fentiekben megadott f, g, h, k, l, m függvényekre vonatkozóan!

Melyek lineáris függvények?
 Melyek állandó függvények?
 Melyek adnak meg egyenes arányosságot?
 Melyek elsőfokú függvények?
 Melyek grafikonja egyenes?

3. Melyik hozzárendelési szabály tartozhat állandó függvényhez, egyenes arányossághoz, fordított arányossághoz, elsőfokú függvényhez, lineáris függvényhez a következők közül?

$$x \mapsto 6x + 3, \quad x \mapsto 0, \quad x \mapsto -\frac{5}{x}, \quad x \mapsto 8, \\ x \mapsto -\frac{2x}{7}, \quad x \mapsto 4x^2 - 2, \quad x \mapsto 3 - 8x, \quad x \mapsto x^2.$$

RÁADÁS

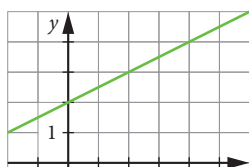
1. Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x - 3$ függvény. Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét, ahol pl. $f(1)$ a függvény $x = 1$ -nél felvett helyettesítési értékét jelenti!
- $$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = ?$$
- $$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + \dots + f(99) + f(100) = ?$$
2. Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 - 16$ függvény. Határozzuk meg az alábbi kifejezés értékét, ahol pl. $f(10)$ a függvény $x = 10$ -nél felvett helyettesítési értékét jelenti!
- $$f(-10) \cdot f(-9) \cdot f(-8) \cdot \dots \cdot f(0) \cdot \dots \cdot f(9) \cdot f(10) = ?$$

CSOPORTMUNKA

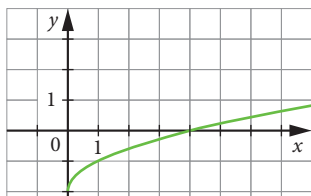
1. Alkossatok négyfős csoportokat! Egy-egy papírdarabon mindenki kapjon egy-egy hozzárendelési szabályt. Egy csoportba kerülnek azok, akiknek a hozzárendelési szabálya ugyanahhoz a grafikonhoz tartozik.

A grafikonok:

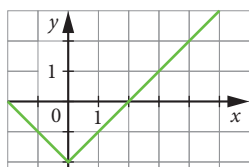
A)



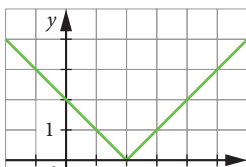
C)



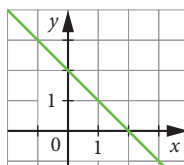
E)



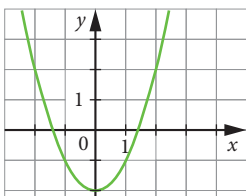
B)



D)



F)



Hozzárendelési szabályok:

$$x \mapsto -x + 2$$

$$x \mapsto 0,5x + 2$$

$$x \mapsto |x - 2|$$

$$x \mapsto \frac{x+4}{2}$$

$$x \mapsto -2 + \sqrt{x}$$

$$x \mapsto |5 - 2x - 7 + 3x|$$

$$x \mapsto \sqrt{x} - 2$$

$$x \mapsto x^2 - 2$$

$$x \mapsto |x| - 2$$

$$x \mapsto 2(1 - x) + x$$

$$x \mapsto -2 + |x|$$

$$x \mapsto -x + x(x + 1) - 2$$

$$x \mapsto 2 + x \cdot x - \sqrt{16}$$

$$x \mapsto 2 \left| \frac{x}{2} \right| - 2$$

$$x \mapsto \sqrt{0,25x} + \sqrt{4}$$

$$x \mapsto \frac{3x}{2} - \frac{5x}{2} + 2$$

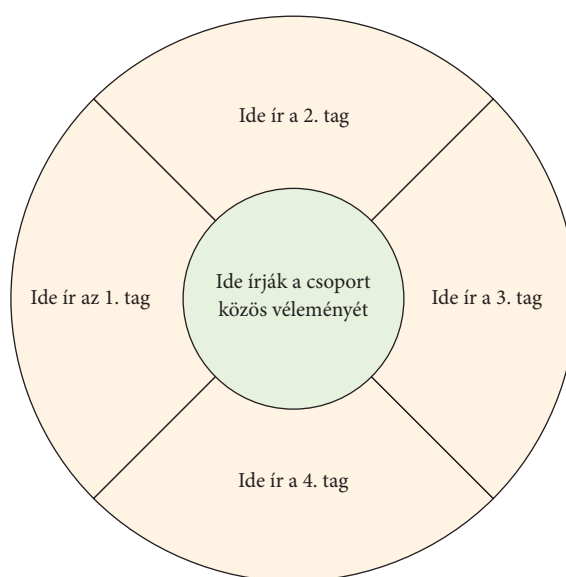
$$x \mapsto \frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{\sqrt{x}}{2} - 2$$

$$x \mapsto |2 - x|$$

2. Mindegyik csoport adja meg a saját függvényének minél több tanult tulajdonságát! (Szóforgó, kerekasztal*.)

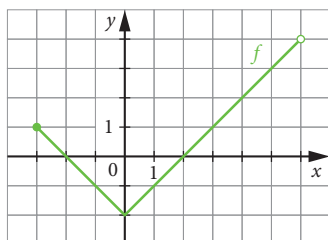
*A *kerekasztal* egy csoport közös véleményének kialakítására alkalmas kooperatív módszerek egyike. Minden „körben” minden csoporttag egy korábban még el nem hangzott véleményt írhat a saját mezőjébe (vagy „passzolhat”) mindaddig, amíg nincs már újabb vélemény. Ekkor a csoport tagjai közösen megegyeznek abban, melyek azok a vélemények, amelyeket mindenki (vagy a többség) elfogad. Ezeket a véleményeket középre írják. Ezek a vélemények alkotják a csoport álláspontját az adott kérdésben. Ha egy osztályban több csoport is alakul, akkor a csoportvéleményekből a *kerekasztal* módszerrel osztályvélemény is kialakítható. A kerekasztal szóbeli formáját *szóforgónak* nevezik.

KEREKASZTAL

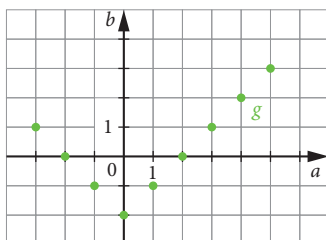


3 Mi mindent tudunk leolvasni az f , g és h függvény grafikonjáról?

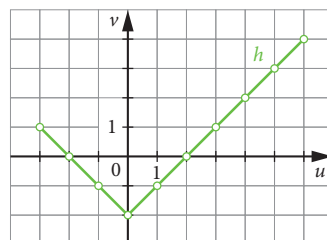
a)



A $[-3; 6[$ halmaz mindegyik eleméhez hozzárendeljük az abszolút értékénél 2-vel kisebb számot.



Mindegyik (-4) és 6 közötti **egész** számhoz hozzárendeljük az abszolút értékénél 2-vel kisebb számot.

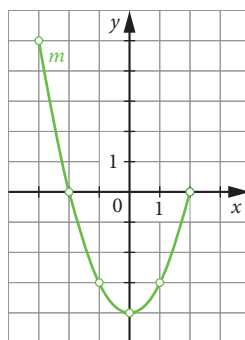
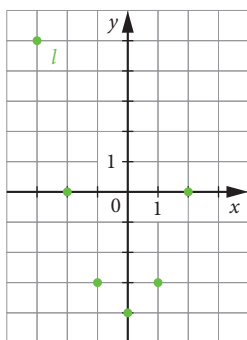
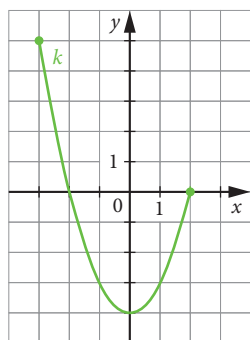


A $]-3; 6[$ halmaz mindegyik **nem egész** eleméhez hozzárendeljük az abszolút értékénél 2-vel kisebb számot.

Függvény neve	Grafikonjának egyenlete	Értelmezési tartománya	Hozzárendelési szabálya	Értékkészlete
f	$y = x - 2$	$D_f = [-3; 6[$	$x \mapsto x - 2$	$R_f = [-2; 4[$
g	$b = a - 2$	$D_g = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$	$a \mapsto a - 2$	$R_g = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$
h	$v = u - 2$	$D_h = D_f \setminus D_g$	$u \mapsto u - 2$	$R_h = R_f \setminus R_g$

Függvény neve	Zérushely	Legnagyobb érték (maximum)	Legkisebb érték (minimum)
f	-2 és 2	nincs	-2
g	-2 és 2	3	-2
h	nincs	nincs	nincs

b) Az a) feladat mintájára adjátok meg szöveggel a k , l , m függvények hozzárendelési szabályát, majd töltsétek ki a füzetben az a)-ban megadott táblázatok mintájára a két táblázatot a k , l , m függvényekre is!



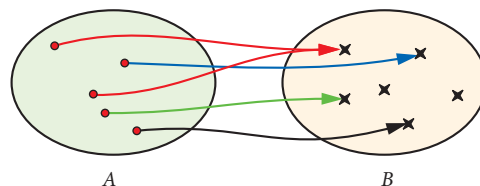
Függvény neve	Grafikonjának egyenlete	Értelmezési tartománya	Hozzárendelési szabálya	Értékkészlete
k				
l				
m				

Függvény neve	Zérushely	Legnagyobb érték (maximum)	Legkisebb érték (minimum)
k			
l			
m			

I. Legyen A és B egy-egy nem üres halmaz. Ha az A minden eleméhez hozzárendeljük a B egy elemét, akkor azt mondjuk, hogy megadtunk egy olyan **függvényt**, amelynek az **értelmezési tartománya** A és egy **képhalmaza** B .

Másképp: az A halmazt leképeztük a B halmazba.

A B halmaznak a hozzárendelésben szereplő elemei alkotják a függvény **értékkészletét**.



Megjegyzés

Az ábrán a B **képhalmaz** 6-elemű, a megadott függvény **értékkészlete** 4-elemű halmaz.

II. Egy függvényt gyakran egy betűvel, például f -fel, g -vel vagy h -val jelölünk. Egy f -fel jelölt függvény értelmezési tartományának a jele D_f , értékkészletének a jele R_f , a D_f valamely x eleméhez hozzárendelt elem jele: $f(x)$. Ezt az x helyen vett **helyettesítési értéknek** nevezzük.

Egy függvényt legtöbbször az értelmezési tartományával és a **hozzárendelési szabályával** adunk meg.

Megállapodás

Ha az értelmezési tartomány a valós számok halmaza, akkor azt nem szükséges felírni.

Ha egy függvény értelmezési tartománya is és értékkészlete is számhalmaz, akkor a hozzárendelési szabályt sokszor egy képlettel is megadhatjuk. Ilyenkor *talpas nyilat* használunk.

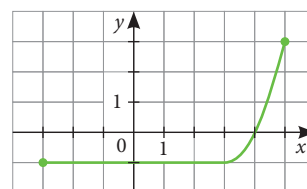
Például az $x \mapsto x^2 + 5$ jelölés azt a függvényt jelenti, amely **minden egyes valós számhoz** a négyzeténél 5-tel nagyobb számot rendeli hozzá.

III. Ha egy függvény értelmezési tartománya és értékkészlete is számhalmaz, akkor az alábbi táblázat szerinti függvénytulajdonságokat szoktuk vizsgálni.

Zérushely	az értelmezési tartománynak azok az elemei, amelyekhez a függvény 0-t rendel, azaz $f(x) = 0$	Pl. az $x \mapsto x^2 - 4$ zérushelyei: 2 és (-2) , az $x \mapsto x^2 + 4$ -nek nincs zérushelye.
Maximum (érték)	a függvény értékkészletének a legnagyobb eleme, ha létezik	Pl. az $x \mapsto 4 - x^2$ maximuma 4, az $x \mapsto 2x - 3$ -nak nincs maximuma.
Maximumhely	az értelmezési tartománynak azok az elemei, amelyekhez a függvény a maximumot rendeli	Pl. az $x \mapsto 4 - x^2$ maximumhelye a 0.
Minimum (érték)	a függvény értékkészletének a legkisebb eleme, ha létezik	Pl. az $x \mapsto x^2 - 4$ minimuma (-4) , az $x \mapsto 2x - 3$ -nak nincs minimuma.
Minimumhely	az értelmezési tartománynak azok az elemei, amelyekhez a függvény a minimumot rendeli	Pl. az $x \mapsto x^2 - 4$ minimumhelye a 0.
Növekedő (csökkenő) függvény	az értelmezési tartomány két eleme közül a nagyobbikhoz nem tartozhat kisebb (nagyobb) helyettesítési érték, mint a kisebbikhez	Pl. az $x \mapsto \sqrt{x}$ ($x \geq 0$) növekedő, az $x \mapsto -2x + 3$ csökkenő függvény.
Szigorúan monoton növekedő (csökkenő) függvény	az értelmezési tartomány két eleme közül a nagyobbikhoz nagyobb (kisebb) helyettesítési érték tartozik, mint a kisebbikhez	Pl. az $x \mapsto \sqrt{x}$ ($x \geq 0$) szigorúan monoton növekedő, az $x \mapsto -2x + 3$ szigorúan monoton csökkenő függvény.

Példa: Ha az f függvény grafikonja az ábra szerinti, akkor $D_f = [-3; 5]$, $R_f = [-1; 3]$.

Zérushely: 4, **maximum** (érték): 3, **maximumhely:** 5. **Minimum** (érték): -1 , **minimumhely:** a $[-3; 3]$ intervallum minden eleme. A függvény **növekedő**, de **nem szigorúan monoton növekedő**.



1. Az f , g , h függvények értelmezési tartománya a $\{-2; -1,5; 0; 1,5; 2\}$ halmaz. $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -2x + 3$, $h(x) = (x - 0,5)^2 - 1$.

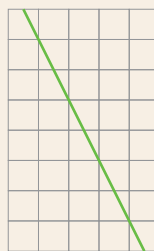
- Ábrázold a függvényeket!
- Melyik monoton függvény? Amelyik monoton, az növekedő vagy csökkenő?
- Melyik függvénynek van zérushelye?
- Melyik függvénynek van maximuma? Ha van, akkor mennyi ez a maximum?
- Melyik függvénynek van minimuma? Ha van, akkor mennyi ez a minimum?

2. Adj meg olyan f , g , h , k függvényeket, amelyeknek értelmezési tartománya $[-2; 3]$, és teljesül rájuk:

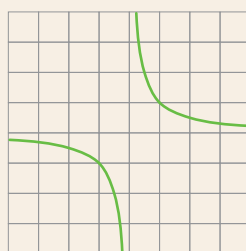
- f -nek két zérushelye van;
- g -nek -2 -ben maximuma van, és szigorúan monoton csökkenő;
- h -nak -2 -ben maximuma van, de nem teljesül rá, hogy szigorúan monoton csökkenő;
- Ⓚ k függvénynek nincs sem zérushelye, sem maximuma, sem minimuma!

3. Az alábbi ábrákon függvények grafikonja látható. Ismert a függvények hozzárendelési szabálya is, csak a koordinátatengelyeket elfelejtették megrajzolni. Rajzold meg a hiányzó tengelyeket a füzetedben, és add meg az egységeket is! Melyik függvénynek van szélsőértéke, melyiknek van zérushelye?

a) $x \mapsto -2x$



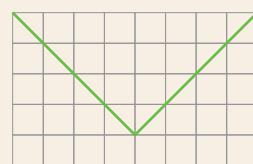
b) $x \mapsto \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$



c) $x \mapsto x^2 - 4$



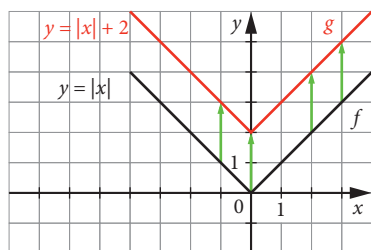
d) $x \mapsto |x - 2|$



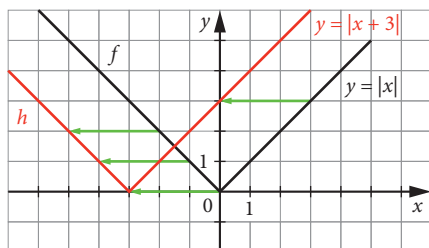
KIDOLGOZOTT FELADAT

- a) Milyen geometriai transzformációval vihető át az f függvény grafikonja a g , illetve a h függvény grafikonjába, ha $f(x) = |x|$, $g(x) = |x| + 2$ és $h(x) = |x + 3|$ ($D_f = D_g = D_h = \mathbf{R}$)?

Megoldás



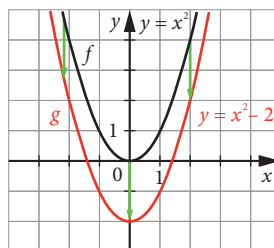
Eltolás az y tengellyel párhuzamosan, **pozitív** irányban, 2 egységgel.



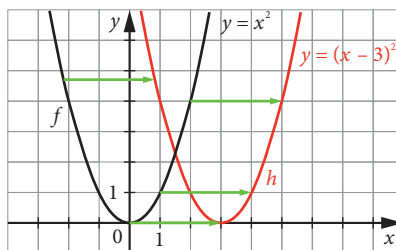
Eltolás az x tengellyel párhuzamosan, **negatív** irányban, 3 egységgel.

- b) Milyen geometriai transzformációval vihető át az f függvény grafikonja a g , illetve a h függvény grafikonjába, ha $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 - 2$ és $h(x) = (x - 3)^2$ ($D_f = D_g = D_h = \mathbf{R}$)?

Megoldás



Eltolás az y tengellyel párhuzamosan, **negatív** irányban, 2 egységgel.



Eltolás az x tengellyel párhuzamosan, **pozitív** irányban, 3 egységgel.

Megjegyzés

Korábban már említettük, hogy az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonja parabola. Ha pedig egy függvény hozzárendelési szabálya $x \mapsto x^2 + v$ vagy $x \mapsto (x - u)^2$ alakú, akkor könnyen meg tudjuk mutatni, hogy a grafikonja eltolással jött létre az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonjából (akármelyik valós számot jelöli is az u és v). Ebből látható, hogy minden ilyen függvény grafikonja is parabola.



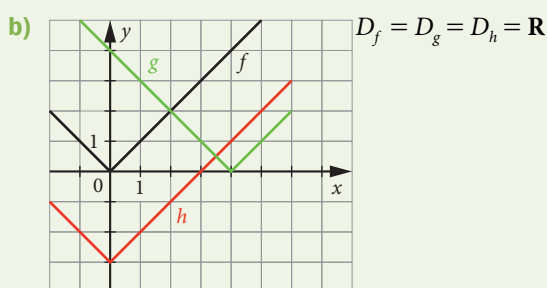
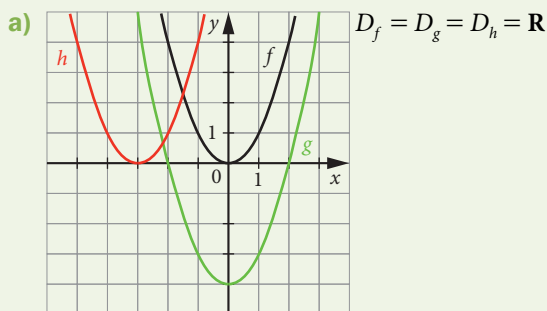
Az adott vektorú eltolások a *GeoGebra* program segítségével is szemléltethetők.

FELADAT

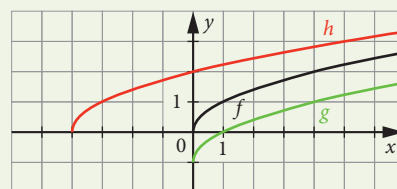
- 1 a) Milyen geometriai transzformációval vihető át az f függvény grafikonja a g , illetve a h függvény grafikonjába, ha $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 3$ és $h(x) = (x + 2)^2$ ($D_f = D_g = D_h = \mathbf{R}$)? Ábrázold mindhárom függvényt ugyanabban a koordináta-rendszerben!

- b) Milyen geometriai transzformációval vihető át az f függvény grafikonja a g , illetve a h függvény grafikonjába, ha $f(x) = |x|$, $g(x) = |x - 3|$ és $h(x) = |x| + 4$ ($D_f = D_g = D_h = \mathbf{R}$)? Ábrázold mindhárom függvényt ugyanabban a koordináta-rendszerben!

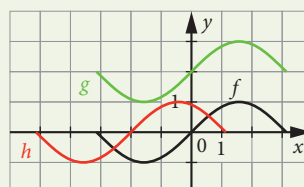
- 2.** Add meg a grafikonok alapján a függvények hozzárendelési szabályát! Mindegyik esetben add meg azokat a geometriai transzformációkat, amelyekkel az f függvény grafikonja a másik két grafikonba átvihető!



- c) $D_f = D_g = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, h értelmezési tartománya a (-4) -nél nem kisebb valós számok halmaza.



- 3.** Három függvény grafikonja látható az ábrán. Az egyik függvény grafikonjának egyenlete $y = f(x)$, a másiké $y = f(x + 2)$, a harmadiké pedig $y = f(x) + 2$. Melyik grafikonhoz melyik egyenlet tartozhat?



HÁZI FELADAT

- 1.** f és g a valós számok halmazán értelmezett függvény. Milyen geometriai transzformációval vihető át az f függvény grafikonja a g függvény grafikonjába, ha

- a) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x| - 4$;
b) $f(x) = x^2$, $g(x) = (x - 4)^2$;
c) $f(x) = x^2 - 3$, $g(x) = x^2$?

Ábrázold a megadott két-két függvényt közös koordináta-rendszerben!



Ellenőrizd a *Graph* vagy *GeoGebra* program segítségével, hogy jók-e a grafikonjaid!

- 2.** Az $y = x^2$ egyenletű parabolát eltoltuk
- a) az y tengellyel párhuzamosan, negatív irányban 1 egységgel;
b) az x tengellyel párhuzamosan, negatív irányban 2 egységgel;
c) az x tengellyel párhuzamosan, pozitív irányban 3 egységgel;

- d) az y tengellyel párhuzamosan, pozitív irányban 4 egységgel.

Rajzold meg a transzformációk végrehajtásával keletkező parabolákat, és add meg mindegyik parabola egyenletét is!

- 3.** Bence mérgesen kiáltott fel, miközben éppen a matek házi feladatát készítette: „Ilyen feladatot nem is csináltunk, ezért nem tudom megoldani!” Édesapja megnézte, és látta, hogy az $x \mapsto x^2 + 6x + 9$ függvényt kellett Bencének ábrázolnia. Így szólt a fiához: „Bence, hiszen éppen ilyen feladatokat gyakoroltatok ezen az órán, csak nem pontosan ebben az alakban volt megadva a hozzárendelési szabály!” Bence egy kicsit elcsodálkozott, de rövid idő múlva így kiáltott: „Tényleg! Ez nagyon egyszerű feladat!” Rajzold meg te is az $x \mapsto x^2 + 6x + 9$ függvény grafikonját!

BEVEZETŐ

St. Louis városának (Missouri, Egyesült Államok) nevezetessége a Gateway Arch (ejtsd: gétvéj árcs), amely egy hatalmas boltív a város központjában. Sokan úgy tartják, hogy parabolaív alakú. Lehetséges ez?

Csupán egy fénykép áll rendelkezésünkre és nem a tervrajz, ezért pontos válasz természetesen nem várható. Az ív parabolára hasonlít, ezért lehet, hogy – jó közelítéssel – egy másodfokú függvény grafikonja; ezt a sejtésünket próbáljuk igazolni. Ahhoz azonban, hogy függvénygrafikonról beszéljünk, szükséges, hogy az ív egy derékszögű koordináta-rendszerben helyezkedjék el. A koordináta-rendszert saját magunk is berajzolhatjuk, ez látható a következő ábrán.

Az építmény külső ívén kerestünk olyan pontokat, amelyek valamely függőleges rácsvonalra illeszkednek. Néhány ilyen pont:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y_{\text{mért}}$	-5	-1,6	-0,4	0	-0,4	-1,6	-5

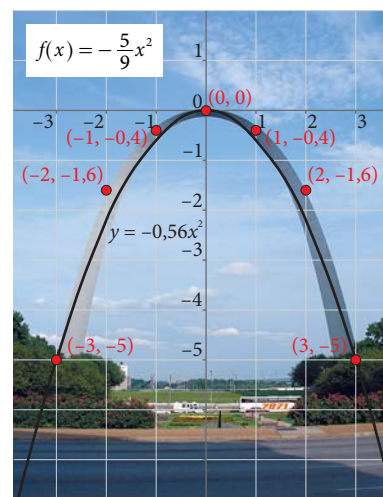
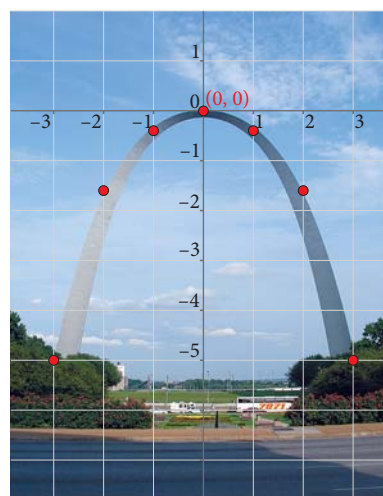
Először célszerű a nagyobb értékeknél keresni az összefüggést, hiszen a kisebb értékeknél a leolvasási hibák sokkal többet számítanak. Tekintsük például a $(3; -5)$ pontot. Ha a függvényünk hozzárendelési szabálya $x \mapsto -x^2$ lenne, akkor a 3-hoz az $y = -9$ függvényérték tartozna. A -5 ennek éppen $\frac{5}{9}$ -szerese, ami azt jelenti, hogy a függvényünk hozzárendelési szabálya csak az $x \mapsto -\frac{5}{9}x^2$ lehet.

Ha erre a függvényre vonatkozóan egy újabb sorral kiegészítve újra elkészítjük a fenti táblázatot, akkor a következőt kapjuk:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y_{\text{mért}}$	-5	-1,6	-0,4	0	-0,4	-1,6	-5
$-\frac{5}{9}x^2$	-5	-2,2	-0,6	0	-0,6	-2,2	-5

A -2 -höz tartozó függvényérték $(-2,2)$ a fényképen mértnek (a $-1,6$ -nak) több mint 130%-a, a (-1) -hez tartozó pedig kb. a 150%-a a megfelelő mért értéknek. Láthatjuk, hogy az eltérés meglehetősen nagy. Ekkora eltérés nem adódhat a leolvasás pontatlanságából.

Ezek szerint az $x \mapsto -\frac{5}{9}x^2$ függvény grafikonja mégsem „idomul” az építmény ívéhez. Ez pedig arra enged következtetni, hogy a Gateway Arch külső íve – bár első ránézésre annak tűnhet, és sokan valóban ezt gondolják róla – nem parabola formájú. Hasonlóan megmutatható, hogy a belső ív sem parabolaív.

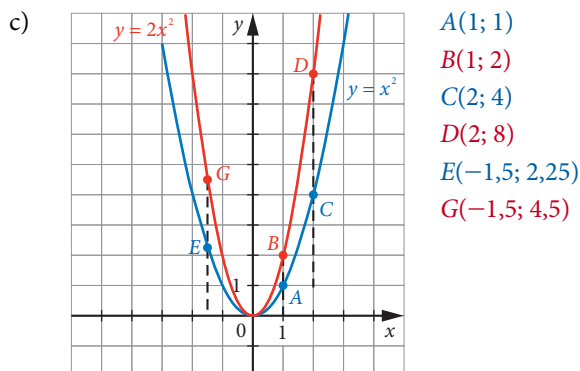
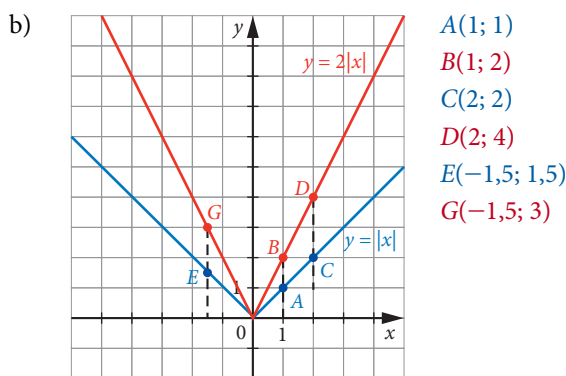
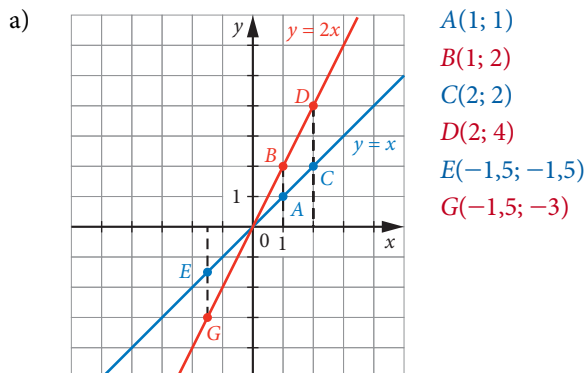


KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Két-két függvényt ábrázoljunk közös koordináta-rendszerben!

- a) $x \mapsto x$ és $x \mapsto 2x$
 b) $x \mapsto |x|$ és $x \mapsto 2|x|$
 c) $x \mapsto x^2$ és $x \mapsto 2x^2$

Megoldás



A **kék** grafikonból úgy kapjuk meg a **pirosat**, hogy minden egyes **kék** pont második koordinátáját kétszeresére változtatjuk, miközben az első koordináta változatlan marad.

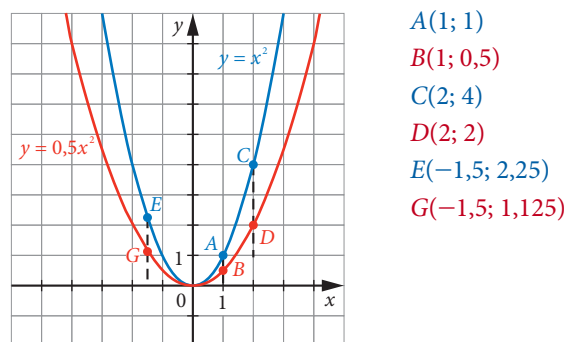
Szemléletesen: a **kék** grafikonokat az abszcisszatengelyre merőleges irányban kétszeresükre „megnyújtottuk” („soványabb” grafikonot kaptunk).

Megjegyzés

Ennek a geometriai transzformációnak a neve: *tengelyes merőleges affinitás*, amelynek tengelye az abszcisszatengely, az aránya pedig 2.

2. Ábrázoljuk az $x \mapsto 0,5x^2$ függvényt!

Megoldás



Az $x \mapsto x^2$ függvény **kék** grafikonjából úgy kapjuk meg az $x \mapsto 0,5x^2$ függvény **piros** grafikonját, hogy minden egyes **kék** pont második koordinátáját felére változtatjuk, miközben az első koordináta változatlan marad. Szemléletesen: a **kék** grafikon az abszcisszatengelyre merőleges irányban a felére „összenyomtuk” („kövérebb” grafikonot kaptunk).

Megjegyzés

Bizonyítható, hogy ha az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonját az x tengelyre merőlegesen „megnyújtjuk” vagy „összenyomjuk”, a kapott görbe ismét parabola lesz (a parabola definícióját lásd a Ráadás részben). Tehát az $x \mapsto cx^2$ ($c \neq 0$) függvény grafikonja parabola. Ennek a parabolának ugyanaz a szimmetriatengelye és a tengelypontja, mint az eredetinek. Ha $c > 0$, akkor a parabola „felfelé nyitott”, ha $c < 0$, akkor pedig „lefelé nyitott”.

Megfordítva is igaz: ha egy parabola szimmetriatengelye az y tengely és tengelypontja az origó, akkor a parabola egy $x \mapsto cx^2$ ($c \neq 0$) függvény grafikonja.



Az ábrázolás megoldható a *Graph* vagy *GeoGebra* programok segítségével is.

FELADAT

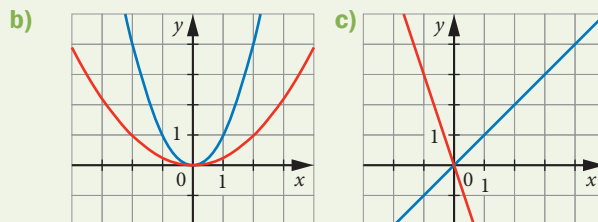
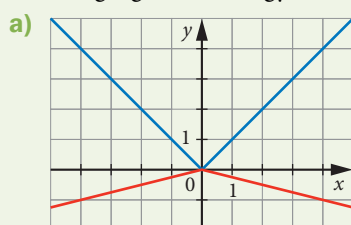
1. Ábrázold a következő függvényeket a $[-4; 4]$ intervallumon!

a) $x \mapsto \frac{1}{2}|x|$ c) $x \mapsto 2\sqrt{x} \ (x \geq 0)$
 b) $x \mapsto \frac{1}{4}x^2$ d) $x \mapsto \frac{1}{3}x$

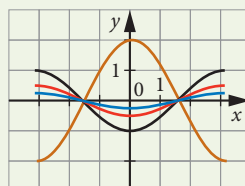
2. Ábrázold a következő függvényeket a $[-4; 4]$ intervallumon!

a) $x \mapsto -2|x|$ c) $x \mapsto -1,5\sqrt{x} \ (x \geq 0)$
 b) $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2$ d) $x \mapsto -\frac{1}{3}x$

3. Add meg a grafikonok egyenletét!



4. A feketével rajzolt grafikon egyenlete: $y = f(x)$.



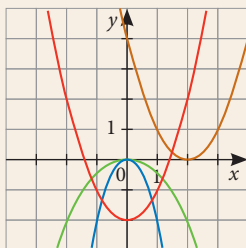
A másik három grafikon egyenlete: $y = -2f(x)$, $y = \frac{1}{2}f(x)$ és $y = \frac{1}{3}f(x)$. Melyik grafikonhoz melyik egyenlet tartozik?

HÁZI FELADAT

1. Ábrázold közös koordináta-rendszerben az alábbi három-három függvényt!

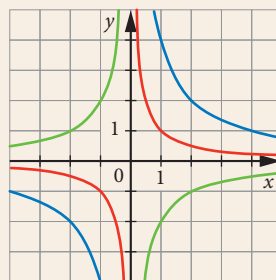
a) $x \mapsto |x|$, $x \mapsto -2|x|$, $x \mapsto \frac{|x|}{2}$
 b) $x \mapsto x$, $x \mapsto -\frac{x}{3}$, $x \mapsto \frac{x}{4}$
 c) $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{x^2}{3}$, $x \mapsto -\frac{x^2}{2}$

2. Közös koordináta-rendszerben ábrázoltuk az $x \mapsto x^2 - 2$, $x \mapsto (x - 2)^2$, $x \mapsto -2x^2$, $x \mapsto x^2 : (-2)$ függvényeket.



Melyik hozzárendelési szabályhoz melyik grafikon tartozik?

3. A grafikonok egyenlete $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{4}{x}$, $y = -\frac{2}{x}$. Melyik egyenlethez melyik grafikon tartozik?



4. Ábrázold közös koordináta-rendszerben az $x \mapsto |x|$, az $x \mapsto -\frac{1}{2}|x| + 2$ és az $x \mapsto \frac{1}{3}|x| + 2$ függvényeket!

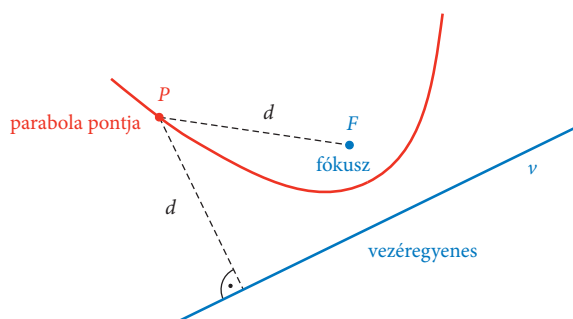


Függvényábrázoló program segítségével is ellenőrizheted, hogy jók-e a grafikonjaid.

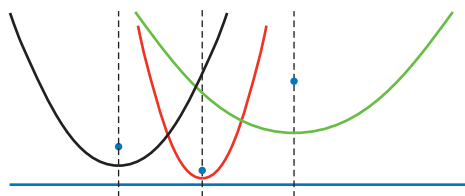
I. Mi a parabola?

Vegyünk fel egy síkban egy egyenest és egy olyan pontot, amely nincs rajta ezen az egyenesen. Nevezzük a pontot fókusznek (F), az egyenest vezéregyenesnek (v).

A sík összes olyan pontjának a halmazát, amely egyenlő távolságra van a fókuszról és a vezéregyestől, **parabolának** nevezzük.



A parabola tengelyesen szimmetrikus ponthalmaz, a szimmetriatengelye átmegy a fókuszon és merőleges a vezéregyenesre. Az, hogy „sovány” vagy „kövér” a parabola, csakis a fókusz és a vezéregyenes távolságától függ. Ha ezt a távolságot növeljük, akkor a parabola „kövérebb” lesz, ha csökkentjük, akkor pedig „soványabb”. (Az ábrán látható három parabolának közös a vezéregyenes, de a fókuszoknak a vezéregyestől való távolsága különböző. Minél kisebb a távolság, annál „soványabb” a parabola.)

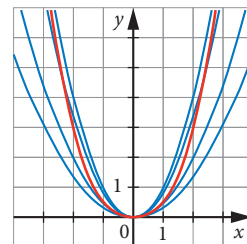


II. Láncgörbe

A Gateway Arch alakját firtató probléma egy amerikai riporter téves megállapításából származik. Amikor az építményt 1968-ban felépítették, az újságíró így kezdte helyszíni riportját: „Ezen a napon a munkások feltették az utolsó követ a St. Louis-i Gateway Arch-ra, s ezzel felépült a világ leghíresebb parabolája.” Ő éppúgy a szemére hagyatkozott, mint Galileo Galilei, aki azt gondolta, hogy a két végénél

megtartott, saját súlya alatt függeszkedő lánc szintén parabola alakot vesz fel. Azóta már bebizonyosodott, hogy nem parabola a függeszkedő lánc alakja. Ezt az alakot (éppen emiatt) *láncgörbének* hívjuk – a Gateway Arch íve egy transzformált láncgörbét formáz.

A mellékelt rajzon pirossal egy láncgörbét, kékkel pedig parabolaívket ábrázoltunk. Látható, hogy a „soványabb” parabolák az origó körül mutatnak jelentős eltérést a láncgörbétől, a „kövérebb” parabolák pedig az origótól távolodva válnak el egyre jobban tőle.



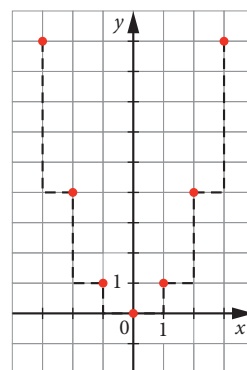
III. Egy ügyes módszer az $y = x^2$ egyenletű parabola közelítő megrajzolására

A parabola tengelypontja az origó. Újabb pontokat kapunk, ha innen

egy lépünk jobbra és **egy**et felfelé, majd az új pontból egy lépünk jobbra és **hárm**at felfelé, majd a legújabb pontból

egy lépünk jobbra és **öt**öt felfelé, és így tovább: a kapott pontból mindig egyet lépünk jobbra és sorban még 7-et, 9-et, 11-et, ... lépünk felfelé.

Ugyancsak a parabola pontjait kapjuk meg, ha nem jobbra, hanem balra lépünk mindig 1-et, felfelé pedig 1-et, 3-at, 5-öt, 7-et, 9-et, 11-et, ...



Hasonlóan kaphatjuk meg az $y = cx^2$ ($c \in \mathbb{R}^+$) egyenletű parabola néhány pontját is. Ebben az esetben is a tengelypontból (az origóból) kiindulva 1-1 lépést kell tenni jobbra, illetve balra, felfelé pedig c , $3c$, $5c$, $7c$, ... egységet, így jutnánk el a parabola pontjaihoz.

Természetesen akkor is alkalmazható ez a módszer, ha egy parabola más helyzetű a koordináta-rendszerben, de a tengelye merőleges az x tengelyre.

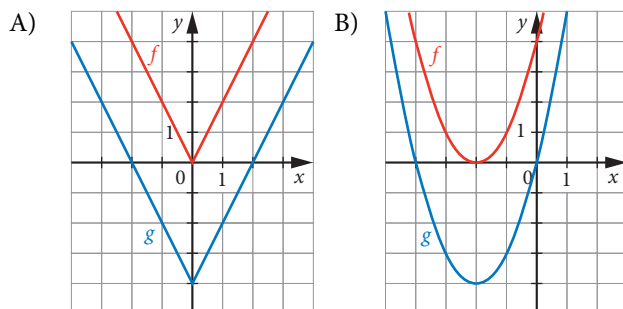
KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a valós számok halmazán értelmezett f és g függvényt, ha
- a) $f(x) = 2|x|$ és $g(x) = 2|x| - 4$;
 b) $f(x) = (x + 2)^2$ és $g(x) = (x + 2)^2 - 4$!

Megoldás

Könnyen észrevehetjük, hogy $g(x) = f(x) - 4$ mindkét esetben, bármely valós számot jelöljön is az x .

Ez pedig azt jelenti, hogy az f függvény grafikonját az y tengellyel párhuzamosan, negatív irányban 4 egységgel eltolva megkapjuk a g függvény grafikonját.



2. Adott az $x \mapsto \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 2$ függvény. Adjuk meg, hogy mely transzformációk egymás utáni végrehajtásával juthatunk el az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonjából a megadott függvény grafikonjához, és ábrázoljuk a transzformációkkal kapott grafikonokat!

Megoldás

A válasz megadásához elegendő, ha azt az utat követjük, ahogyan egy adott x helyen kiszámítjuk a függvényértéket:

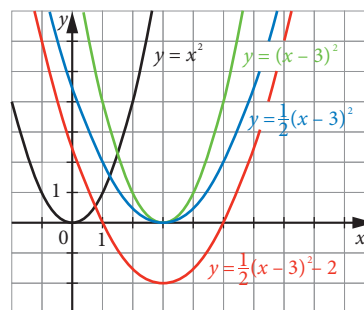
először „kiszámítjuk” $(x - 3)^2$ értékét, majd vesszük ennek a felét: $\frac{1}{2}(x - 3)^2$.

A kapott „számból” kivonunk 2-t: $\frac{1}{2}(x - 3)^2 - 2$.

A megfelelő transzformációk tehát rendre a következők lehetnek:

- eltolás az x tengellyel párhuzamosan, pozitív irányban 3 egységgel,
- összenyomás felére az x tengelyre merőlegesen,
- eltolás az y tengellyel párhuzamosan, negatív irányban 2 egységgel.

A transzformációkat szemlélteti a mellékelt ábra.



Megjegyzés

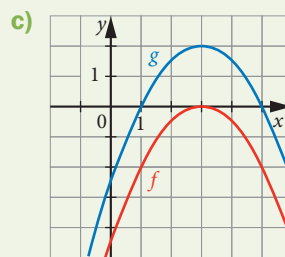
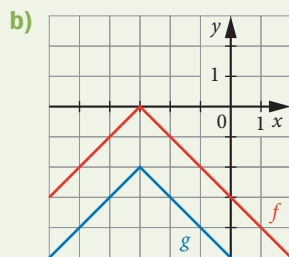
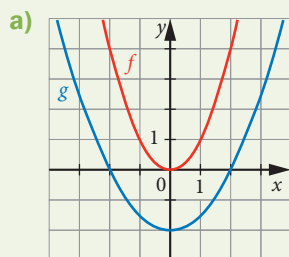
A kiindulási parabolát az egymás utáni transzformációk parabolába vitték át, tehát az $x \mapsto \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 2$ függvény grafikonja is **parabola**. Ennek a parabolának a **tengelypontja** a $(3; -2)$ pont. A tengelyponton megy át a parabola **szimmetriatengelye**, amely most párhuzamos az y tengellyel.

FELADAT

1. ✎ Ábrázold közös koordináta-rendszerben a valós számok halmazán értelmezett f és g függvényt, ha
- a) $f(x) = -\frac{1}{2}|x|$ és $g(x) = -\frac{1}{2}|x| + 3$;
 b) $f(x) = -(x + 2)^2$ és $g(x) = -(x + 2)^2 + 3$!

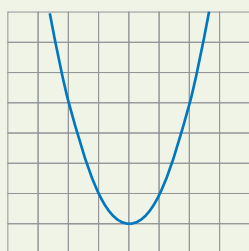
2. ✎ Adott az $x \mapsto -2|x + 3| + 4$ függvény. Add meg, hogy mely transzformációk egymás utáni végrehajtásával juthatunk el az $x \mapsto |x|$ függvény grafikonjából a megadott függvény grafikonjához, és ábrázold a transzformációk során kapott grafikonokat!

3 Add meg a valós számok halmazán értelmezett f és g hozzárendelési szabályát!

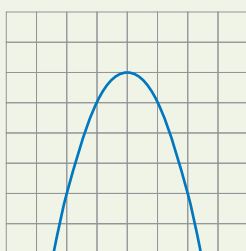


4 Add meg a füzetedben a hiányzó koordinátatengelyeket és a tengelyeken az egységeket a parabolákhoz!

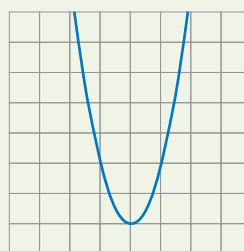
a) $x \mapsto (x - 2)^2 - 1$



b) $x \mapsto -(x - 2)^2 + 1$



c) $x \mapsto 2(x - 2)^2 - 3$



5 Mely számok a 4. feladatban megadott függvények zérushelyei?



A függvények ábrázolásához a *GeoGebra* vagy a *Graph* program is használható.

HÁZI FELADAT

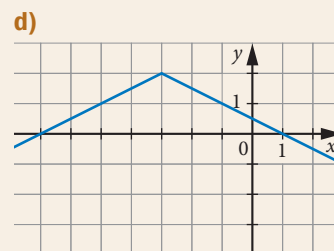
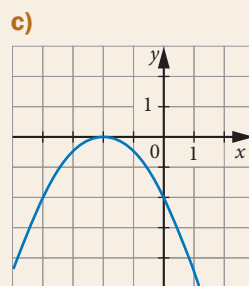
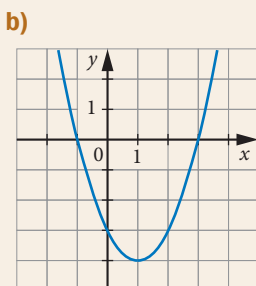
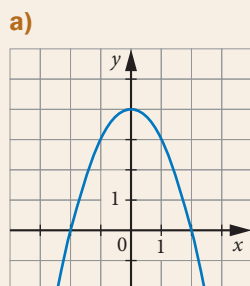
1 Ábrázold a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, ha

a) $f(x) = \frac{3}{2}|x| - 1$; **b)** $f(x) = \frac{3}{2}|x - 1|$; **c)** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$; **d)** $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 3)^2$!

2 Ábrázold az alábbi függvényeket! Van-e zérushelyük, szélsőértékük?

a) $x \mapsto \frac{3}{x} + 2$ ($x \neq 0$) **b)** $x \mapsto \frac{3}{x + 2}$ ($x \neq -2$) **c)** $x \mapsto -\frac{2}{x - 3}$ ($x \neq 3$) **d)** $x \mapsto -\frac{4}{x + 1} + 3$ ($x \neq -1$)

3 Add meg a függvények hozzárendelési szabályát a grafikonjuk alapján!



4 Ábrázold a függvényeket! Van-e zérushelyük, szélsőértékük?

a) $x \mapsto x^2 + 2x + 1$ **b)** $x \mapsto x^2 - 4x + 4$ **c)** $x \mapsto -x^2 + 4x - 4$ **d)** $x \mapsto x^2 - 10x + 25$

ELMÉLET

Ha a , b és c adott számok és $a \neq 0$, akkor az $x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto ax^2 + bx + c$ függvényt **másodfokú függvénynek** nevezzük.

Például

- a) az $x \mapsto 3x^2 - 2x - 5$ függvény másodfokú, és itt $a = 3$, $b = -2$ és $c = -5$.
 b) az $x \mapsto 2,5x^2 - x + 3,8$ függvény másodfokú, és itt $a = 2,5$, $b = -1$ és $c = 3,8$.
 c) az $x \mapsto -x^2 + 3$ függvény másodfokú, és itt $a = -1$, $b = 0$ és $c = 3$.



A másodfokú függvények ábrázolásához használható a *GeoGebra* program is.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Mutassuk meg, hogy az f , g , h másodfokú függvények grafikonja is parabola! Ábrázoljuk a függvényeket!

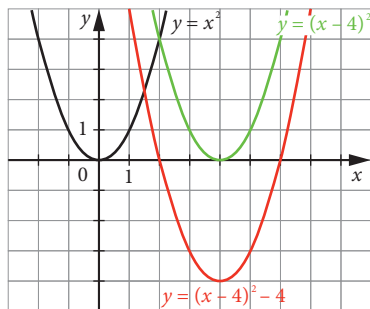
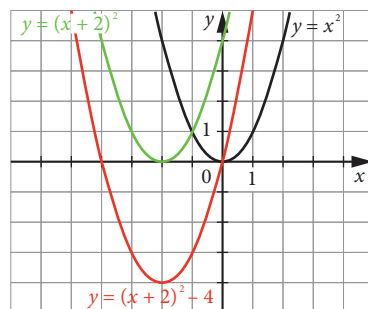
a) $f(x) = x^2 + 4x$ b) $g(x) = x^2 - 8x + 12$ c) $h(x) = -2x^2 + 4x$

Megoldás

Mindegyik hozzárendelési szabályt átalakítjuk úgy, hogy a feladat állítása könnyen igazolható legyen.

- a) Mivel $f(x) = x^2 + 4x = x^2 + 4x + 4 - 4 = (x^2 + 4x + 4) - 4 = (x + 2)^2 - 4$,
 ezért $f(x) = (x + 2)^2 - 4$.

Ebből látható, hogy ha az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonját (amely egy parabola) eltoljuk az x tengellyel párhuzamosan negatív irányban 2 egységgel, majd az így kapott parabolát eltoljuk az y tengellyel párhuzamosan negatív irányban 4 egységgel, akkor megkapjuk az f függvény grafikonját. Ezért ez is egy parabola.



- b) Hasonlóan járunk el, mint az előbb.

$$g(x) - 12 = x^2 - 8x = x^2 - 8x + 16 - 16 = (x^2 - 8x + 16) - 16 = (x - 4)^2 - 16,$$

ezért $g(x) = (x - 4)^2 - 16 + 12$, vagyis $g(x) = (x - 4)^2 - 4$.

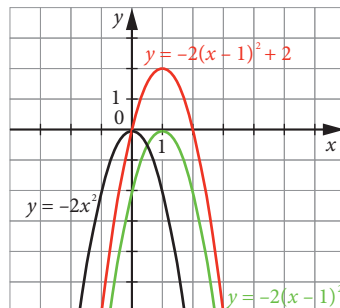
Az előzőekhez hasonlóan látható, hogy a g függvény grafikonja is megkapható az $x \mapsto x^2$ grafikonjának eltolásával, azaz a g függvény grafikonja is parabola.

- c) Megismételjük az előbbieken alkalmazott „trükköket”.

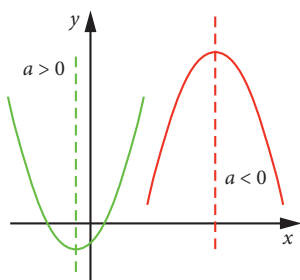
$$\frac{h(x)}{-2} = x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x^2 - 2x + 1) - 1 = (x - 1)^2 - 1.$$

Tehát $\frac{h(x)}{-2} = (x - 1)^2 - 1$, ezért $h(x) = -2(x - 1)^2 + 2$.

A h függvény grafikonját megkaphatjuk úgy is, hogy az $x \mapsto -2x^2$ függvény grafikonját eltoljuk az x tengellyel párhuzamosan +1 egységgel és az y tengellyel párhuzamosan +2 egységgel. Tehát a h függvény grafikonja is parabola.

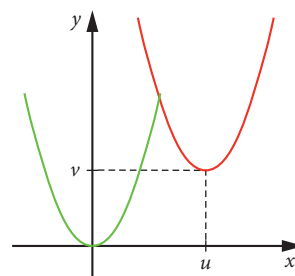


ELMÉLET



Az $x \mapsto ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény grafikonja olyan **parabola**, amelynek a tengelye merőleges az x tengelyre. Ez a parabola „felfelé” nyitott, ha $a > 0$, „lefelé” nyitott, ha $a < 0$.

Az $x \mapsto ax^2 + bx + c$ hozzárendelési szabály algebrai módszerekkel átalakítható $x \mapsto a(x - u)^2 + v$ alakra. Az itt fellépő u és v éppen a parabola tengelypontjának az első, illetve második koordinátája. E számok azt is megmutatják, mennyivel kell eltolni az $x \mapsto ax^2$ függvény grafikonját a koordinátatengelyek mentén, hogy az $x \mapsto ax^2 + bx + c$ függvény grafikonját megkapjuk. Ezt az algebrai átalakítást **teljes négyzetté kiegészítés** módszerének nevezzük.



FELADAT

1. Ábrázold az $f: x \mapsto (x - 3)^2 - 4$ függvényt!

- Algebrai átalakítás segítségével add meg ennek a másodfokú függvénynek az általános alakját ($x \mapsto ax^2 + bx + c$)
- Olvasd le a parabola tengelypontját!
- Hol veszi fel ez a függvény a minimumát?

2. Egy másodfokú függvény grafikonja olyan parabola, amely egybevágó az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonjával, és amelynek tengelypontja a $(-2; 5)$ pont. Hány ilyen másodfokú függvény van? Írd fel a hozzárendelési szabályát!

3. Összehasonlítva a másodfokú függvény általános alakjával ($x \mapsto ax^2 + bx + c$) határozd meg az a , b és c értékét! Minimuma vagy maximuma van a függvénynek?

- $x \mapsto x^2 - 4x + 5$
- $x \mapsto x^2 + 8x + 12$
- $x \mapsto -0,5x^2 + 2x - 2$
- $x \mapsto -3x^2 + 18x$

4. Az azonosságnak változtattuk a bal oldalát. Határozd meg, milyen szám hiányzik a kipontozott részből?

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= (x + 3)^2 \\ x^2 + 6x + 8 &= (x + 3)^2 - \dots \\ x^2 + 6x + 11 &= (x + 3)^2 + \dots \\ x^2 + 6x &= (x + 3)^2 - \dots \end{aligned}$$

HÁZI FELADAT

1. Minimuma vagy maximuma van a függvényeknek?

- $x \mapsto -3x^2 - 26x - 42$
- $x \mapsto -0,4x^2 - 4,8$
- $x \mapsto 3x - 3x^2 + 9$
- $x \mapsto -1,12 + 2x + 6,1x^2$

2. Adj meg olyan, a valós számok halmazán értelmezett másodfokú függvényt, melynek a -4 helyen

minimuma van, és a minimum értéke -3 ! Írd fel a függvényt az általános ($x \mapsto ax^2 + bx + c$) alakjával is!

3. Alkalmazd az $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ azonosságot, majd ábrázold közös koordináta-rendszerben a két függvényt!

$$f: x \mapsto x^2 - 4x + 4 \qquad g: x \mapsto x^2 - 4x + 1$$

EMELT SZINT

1. Határozd meg az alábbi másodfokú függvények zérushelyeit!

- $x \mapsto x^2 - 16$
- $x \mapsto x^2 - 16x$
- $x \mapsto x^2 + 16$
- $x \mapsto x^2 + 16x$
- $x \mapsto -x^2 + 16$

2. Alkalmazd a teljes négyzetté kiegészítés módszerét, majd ábrázold az órai 3. feladatban szereplő függvényeket!

KIDOLGOZOTT FELADAT

Ábrázoljuk az $f: x \mapsto 3x^2 - 6x + 5$ függvényt!

Az ábrázolás egyik útja a teljes négyzetté alakítás módszere, ezt múlt órán megismerhetted. Most egy másik gondolatmenet mutatunk.

Megoldás:

- a) Foglalkozunk először az egyszerűbb, $g: x \mapsto 3x^2 - 6x$ függvénnyel!

Ez egy másodfokú függvény, grafikonja ezért egy parabola, melynek tengelye merőleges az x tengelyre. Ez a parabola felfelé nyitott, mert az x^2 együtthatója 3, ami pozitív. Határozzuk meg a g függvény zérushelyeit! Ezeket úgy kapjuk meg, ha megoldjuk a $3x^2 - 6x = 0$ egyenletet.

$$3x^2 - 6x = 3(x^2 - 2x) = 3x(x - 2) = 0$$

A szorzat 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért g függvény zérushelyei 0 és 2. Ezeket már be is jelölhetjük a koordináta-rendszerben.

A parabola szimmetriatengelye a két zérushely között középen metszi az x tengelyt. Ezt is bejelölhetjük.

Látható, hogy a szimmetriatengelyen lévő pont első koordinátája 1. Ennyi tehát a parabola tengelypontjának első koordinátája. Milyen értéket vesz fel g függvény az 1 helyen?

$$g(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3.$$

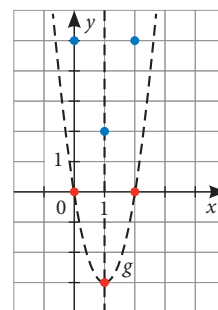
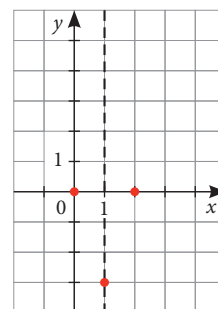
A parabola tengelypontja tehát az $(1; -3)$ pont.

A két zérushely és a tengelypont segítségével elég jó ábrát készíthetünk a g függvényről.

- b) Az f függvény abban különbözik g függvénytől, hogy értéke minden helyen 5-tel több:

$$f(x) = g(x) + 5.$$

Ezért az f grafikonját megkaphatjuk, ha g grafikonját az y tengely mentén 5 egységgel feljebb toljuk. Ezt úgy érdemes megtenni, hogy az előbb meghatározott 3 pontot feljebb toljuk, és abból rajzoljuk meg a parabolát. Az f függvény tengelypontja leolvasható a grafikonról: az $(1, 2)$ pont.



ELMÉLET

A másodfokú függvény, $f(x) = ax^2 + bx + c$; ($a \neq 0$) ábrázolásának egyik útja:

1. A $g(x) = ax^2 + bx$ függvény képe egy parabola. Ennek tengelyét és három pontját meghatározzuk:
 - zérushelyeit megkaphatjuk az $ax^2 + bx = 0$ egyenletből. A kifejezést alakítsuk szorzattá! (Az egyik zérushely a 0.)
 - a szimmetriatengely az x tengelyre merőleges, és a két zérushely között középen metszi a tengelyt.
 - a parabola tengelypontjának első koordinátáját a szimmetriatengely jelöli ki. A másik koordinátát megkapjuk, ha behelyettesítünk $g(x)$ -be. (Ellenőrizhetjük, hogy a parabola felfelé nyitott, ha $a > 0$, lefelé nyitott, ha $a < 0$.)
2. Az f függvény grafikonját megkapjuk, ha g grafikonját (3 pontja segítségével) az y tengely mentén c -vel eltoljuk.

FELADAT

1. Szorozd át alakítással oldd meg az egyenleteket!

- a) $x^2 - 8x = 0$
- b) $x^2 + 3,2x = 0$
- c) $2x^2 - 8x = 0$
- d) $\frac{1}{2}x^2 + 3x = 0$

2. Ábrázold a zérushelyek és a tengelypont segítségével az $f: x \mapsto x^2 + 5x$ másodfokú függvényt, majd ennek segítségével ugyanabban a koordináta-rendszerben a $g: x \mapsto x^2 + 5x + 3$ másodfokú függvényt is! Add meg a g függvény szélsőértékének helyét és értékét!

3. Ábrázold a zérushelyek és a tengelypont segítségével az $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ másodfokú függvényt, majd ennek segítségével ugyanabban a koordináta-rendszerben a $g: x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 4$ másodfokú függvényt is!

Add meg a g függvény szélsőértékének helyét és értékét!

4. Határozd meg a függvények ábrázolása nélkül az $f: x \mapsto 0,1x^2 - 2,2x$ és a $g: x \mapsto 0,1x^2 - 2,2x + 5,8$ másodfokú függvények minimumhelyét és a minimum értékét!

HÁZI FELADAT

1. Ábrázold a $h: x \mapsto 12x - 3x^2 + 7$ függvényt úgy, hogy először a $k: x \mapsto 12x - 3x^2$ függvény grafikonját rajzolod meg a k zérushelyei és a k grafikonjának tengelypontja segítségével! Add meg a h függvény maximumát és maximumhelyét!

2. Ábrázold az $x \mapsto 2x^2 - 10x + 8$ másodfokú függvényt! Számítással határozd meg a grafikon tengelypontjának koordinátáit! A grafikon alapján állapítsd meg a függvény zérushelyeit!

3. Határozd meg a következő másodfokú függvények zérushelyeit! Készíts vázlatos rajzot a függvény grafikonjáról a zérushelyek segítségével!

- a) $f: x \mapsto 0,2x^2 - 5x$
- b) $g: x \mapsto -0,2x^2 - 0,8x$
- c) $h: x \mapsto 7x - 5x^2$
- d) $k: x \mapsto 0,4x^2 - 1,6x + 1,6$



Függvényábrázoló programmal ellenőrizheted a megoldásaid helyességét.

RÁADÁS

Spanyolországban, Valencia városában található a híres L'Umbracle nevű télikert, melynek keresztmetszete parabolához hasonlít. (Valójában – a Gateway Arch boltívéhez hasonlóan – ez is láncgörbe.) A télikert magassága 8 m, szélessége 12 m. Hová telepíthetünk a télikerten belül pálmákat, ha tudjuk, hogy egy pálma 6 méteresre nő meg, és lombkoronájának átmérője 2 m?

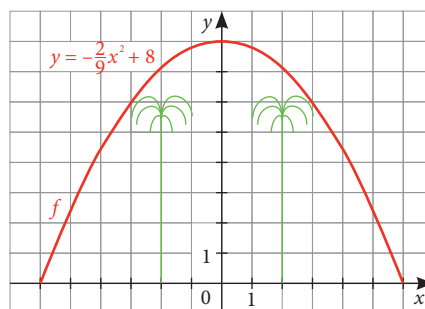
Megoldás

Helyezzünk egy parabolívét az ábra szerint egy olyan koordináta-rendszerbe, amelynek tengelyein 1 méteres egységeket jelöltünk ki.

Ez a parabolaív az $x \mapsto -\frac{2}{9}x^2 + 8$ másodfokú függvény grafikonjára illeszkedik.

A 6 m magas pálma lombkoronájának széle olyan d távolságra lehet a parabola tengelyétől, amelyre

$-\frac{2}{9}d^2 + 8 = 6$, amiből $d^2 = 9$, vagyis a lombkorona széle legfeljebb 3 m-re lehet a parabola tengelyétől, a pálmafa törzse pedig legfeljebb 2 m-re.



FELADAT

1. Határozd meg, hol van zérushelye és szélsőértéke a következő függvényeknek!

a) $f: x \mapsto x^2 + 112x$

b) $g: x \mapsto 14x^2 - 168x$

2. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a függvényeket!

a) $x \mapsto x^2 - 3x$; $x \mapsto x^2 - 3x - 2$

b) $x \mapsto 2x^2 - 8x$; $x \mapsto 2x^2 - 8x + 7$

3. Egy matematikai modell szerint, ha egy terepjáró 1 liter üzemanyaggal x km-t képes megtenni, akkor a terepjáró szén-dioxid-kibocsátása 50 000 km-en: $d(x) = 200x^2 - 5200x + 44\,000$.

Ez a matematikai modell akkor érvényes, ha $4,8 \leq x \leq 13,2$.

A sportterejjáró korunk dinoszaurusza, mely keresztülhasít a tájon. Méretéhez képest a vezetőjének az agya elenyésző, 3-5-ször szennyezőbb, mint egy átlagos autó, és óránként 16 kilométeres sebesség mellett is képes ölni.

A dinoszauruszokkal ellentétben a sportterejjárók vagy luxusterepjárók még nem haltak ki. Az Explorer, a Land Rover, a Pathfinder és az Expedition mind olyan járművek, melyek teret követelnek maguknak. Az új autók amerikai piacának 50%-át teszik ki, és már Európát is célba vették.



A matematikai modell alapján elemezd a terepjárók szén-dioxid-kibocsátását!

- a) Hány liter üzemanyagot fogyaszt 100 km-en az a terepjáró, amely 1 liter üzemanyaggal 4,8 km-t képes megtenni? És az, amelyik 13,2 km-t?
- b) A modell szerint hány km-t képes megtenni 1 liter üzemanyaggal az a terepjáró, amelyik a legkevesebb szén-dioxidot bocsátja ki? Hány liter üzemanyagot fogyaszt 100 km-en ez a terepjáró?
- c) Hány kilogramm szén-dioxidot juttat a légkörbe 50 000 km-en a legkevésbé szennyező terepjáró? És az, amelyik a legtöbb szén-dioxidot bocsátja ki?

4. Veszélyes hulladék megsemmisítése

Egy amerikai államban egy tanulmány részeként a veszélyes hulladékok kezelésével is foglalkoztak. A veszélyes hulladéknak a PCP (pentaklórfenol) eltávolítása céljából történő kezelési költsége növekszik az eltávolított PCP mennyiségének növekedésével. Egy **matematikai modell szerint**, ha naponta x kilogramm PCP-t távolítanak el, akkor a költség dollárban kifejezve:

$$k(x) = 2000 + 100x^2.$$



Az állam PCP-kilogrammonként 500 dollárt átválal a költségekből.

Elemezzük a nettó (az állami hozzájárulás következtében kialakuló) költséget a **matematikai modell** alapján, a naponta megsemmisített PCP mennyiségének függvényében!

- a) Ábrázold közös koordináta-rendszerben, hogy x kg PCP megsemmisítése esetén :
- Hogyan alakulnának a költségek, ha nem lenne hozzá állami támogatás?
 - Hogyan alakulnak a költségek az állam támogatásával?

Válassz olyan egységeket a vízszintes és a függőleges tengelyekre, hogy szemléletesek legyenek a grafikonok!

- b) Hány kg PCP megsemmisítése esetén lesz a napi költség a legkisebb? Mekkora ez a legkisebb napi költség?
- c) ☞ Mire tudnál még következtetni a költségekre felírt $k(x)$ függvényből?

- 5 ☞ Egy 20 cm hosszú cérnaszállal téglalap alakú síkrészt kerítünk el.

- a) Ha a téglalap egyik oldalának hossza x cm, akkor hány cm hosszú a téglalap másik oldala, és hány cm^2 a téglalap területe?
- b) Ábrázold az oldalhossz és a terület kapcsolatát!
- c) Melyik x -hez tartozik a legnagyobb terület?

HÁZI FELADAT

- 1 ☞ Ábrázold közös koordináta-rendszerben a függvényeket!

a) $x \mapsto |x|$; $x \mapsto |x + 1,5|$; $x \mapsto |x + 1,5| - 2,5$;

b) $x \mapsto 2x^2 + 6x$; $x \mapsto 2x^2 + 6x - 1$

- 2 ☞ Egy terepjáró átlagos, kilogrammban mért tömege egy matematikai modell szerint a következőképpen függ a terepjáró évjáratától:

$$m(t) = 1,5t^2 - 45t + 2100,$$

ahol $5 \leq t \leq 27$, és t az időt jelöli. A $t = 0$ érték azt jelenti, hogy 1970-ben, a $t = 5$ azt, hogy 1975-ben

és így tovább, a $t = 27$ azt, hogy 1997-ben gyártották a gépkocsit.

A modell szerint

- a) mekkora volt a terepjárók átlagos tömege 1975-ben, 1980-ban, 1990-ben;
- b) melyik évben csökkent és melyikben növekedett a terepjárók átlagos tömege;
- c) melyik évben volt a legkisebb a terepjárók átlagos tömege, és ez hány kg volt;
- d) mekkora volt a terepjárók átlagos tömege 2000-ben?(!)

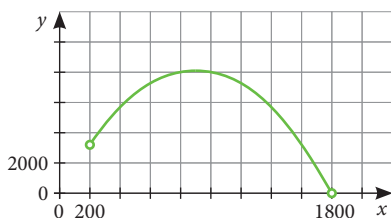
- 3 ☞ Egy 20 cm hosszú cérnaszállal téglalap alakú síkrészt kerítünk el úgy, hogy a téglalap egyik oldala egy hosszú hurkapálca egy része, és csak a másik három oldal cérna.

- a) Ha a téglalap egyik oldalának hossza x cm, akkor hány cm hosszú a téglalap másik oldala, és hány cm^2 a téglalap területe? (Két lehetőség is van!)
- b) Ábrázold az oldalhossz és a terület kapcsolatát!
- c) Melyik x -hez tartozik a legnagyobb terület? Hasonlítsd össze a lecke 4. feladatára kapott választ a most adott válasszal! Mit tapasztalsz?



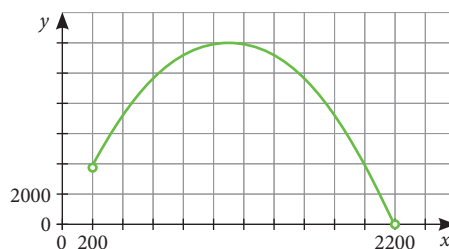
TUDÁSPRÓBA I.

1. Ábrázold a következő függvényt!
 $x \in \mathbb{R} \quad x \mapsto |x + 5| - 2$
2. A valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto x^2$ függvényt told el az x tengely mentén $(+1,5)$ -del, az y tengely mentén $(-2,5)$ -del! Ábrázold a kapott függvényt! Határozd meg az értékkészletét, szélsőértékét, jellemezd a monotonitását!
3. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket!
 $D_f = [-1; 3] \quad f(x) = x^2$
 $D_g = [-1; 3] \quad g(x) = \frac{2}{3}x^2$
 Határozd meg a függvények szélsőértékeit, és értékkészletét!
4. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket!
 $x \mapsto 3x^2 - 9x$ és $x \mapsto 3x^2 - 9x - 1$
 Határozd meg a függvény szélsőérték helyét és szélsőértékét!
5. Egy gép alkatrészeket gyárt. A gyártás hasznát (forintban) a cég a következő függvénnyel számolja: óránként x db alkatrész gyártásakor ($200 < x < 1600$) a haszon $f(x) = -0,01x^2 + 18x$.
 - a) Mekkora a haszon, ha 500 terméket gyártanak?
 - b) Mekkora a haszon, ha 800 terméket gyártanak?
 - c) Mekkora a haszon, ha 1000 terméket gyártanak?
 - d) Ábrázoltuk az $f(x)$ függvényt. Milyen x értéknél lesz a gép üzemeltetése optimális? Mennyi az elérhető legnagyobb haszon?



TUDÁSPRÓBA II.

1. Ábrázold a következő függvényt!
 $x \in \mathbb{R} \quad x \mapsto (x - 3)^2 - 2$
2. A valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto |x|$ függvényt told el az x tengely mentén $(+3,5)$ -del, az y tengely mentén $(-4,5)$ -del! Ábrázold a kapott függvényt! Határozd meg az értékkészletét, szélsőértékét, jellemezd a monotonitását!
3. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket!
 $D_f = [-1; 3] \quad f(x) = |x|$
 $D_g = [-1; 3] \quad g(x) = \frac{5}{3}|x|$
 Határozd meg a függvények szélsőértékeit, és értékkészletét!
4. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket!
 $x \mapsto 3x^2 + 9x$ és $x \mapsto 3x^2 + 9x - 2$
 Határozd meg a függvény szélsőérték helyét és szélsőértékét!
5. Egy gép alkatrészeket gyárt. A gyártás hasznát (forintban) a cég a következő függvénnyel számolja: óránként x db alkatrész gyártásakor ($200 < x < 2000$) a haszon $f(x) = -0,01x^2 + 22x$.
 - a) Mekkora a haszon, ha 500 terméket gyártanak?
 - b) Mekkora a haszon, ha 900 terméket gyártanak?
 - c) Mekkora a haszon, ha 1200 terméket gyártanak?
 - d) Ábrázoltuk az $f(x)$ függvényt. Milyen x értéknél lesz a gép üzemeltetése optimális? Mennyi az elérhető haszon legnagyobb értéke?



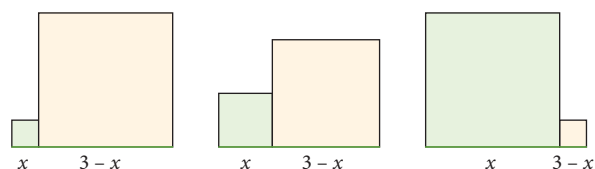
Láttuk, hogy ha $a \neq 0$, akkor az $x \mapsto ax(x-d)$ függvény zérushelyei: 0 és d ; szélsőérték helye: $\frac{d}{2}$. Ez a szélsőérték minimum, ha $a > 0$, és maximum, ha $a < 0$.

- 1.** Egy 3 dm-es szakaszt két részre bontunk, a részek fölé egy-egy négyzetet emelünk. Hogyan változik a két négyzet területének összege többféle felosztás esetén?

Megoldás

Látjuk, hogy ha az egyik négyzet oldala „nagyon kicsi”, akkor a másik négyzet területe majdnem $9 \text{ (dm}^2\text{)}$.

Első módszer

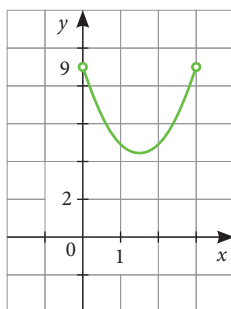


Legyen az x bármely, 3-nál kisebb pozitív szám. Jelöljük $T(x)$ -szel a vizsgált összeget! Ekkor

$$T(x) = x^2 + (3-x)^2 = 2x^2 - 6x + 9 = 2(x^2 - 3x) + 9.$$

Ábrázoljuk a $T(x)$ függvényt!

A grafikonról leolvasható, hogyan változik $T(x)$, ha x -et változtatjuk.

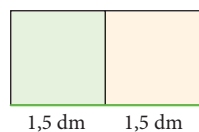


$f(x) = x^2 - 3x = x(x-3)$, ezért az f zérushelyei: 0 és 3.

Ha az x a 0-tól az 1,5-ig nő, akkor $T(x)$ egyre kisebb lesz, a legkisebb értékét akkor éri el, amikor $x = 1,5$. Ha ezután tovább növeljük az x -et, akkor a $T(x)$ egyre nagyobb értékeket vesz fel.

A két négyzet területösszegének legkisebb értéke:

$$T(1,5) = 4,5.$$

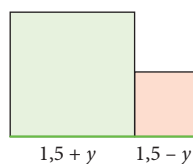


Ezt az értéket akkor kapjuk, ha a 3 dm-es szakaszt két egyenlő részre vágjuk, és úgy emelünk rájuk négyzeteket.

Második módszer

Ha a 3 dm-es szakaszt két egyenlő részre bontjuk, és ezekre állítjuk a négyzeteket, akkor a területek összege

$$T = 1,5^2 + 1,5^2 = 2 \cdot 2,25 = 4,5 \text{ (dm}^2\text{)}.$$



Legyen az y egy 1,5-nél kisebb pozitív szám.

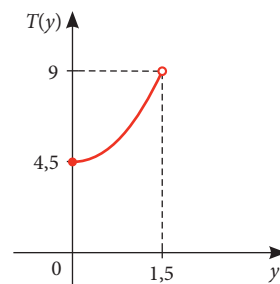
Ha az egyik négyzet oldalai $(1,5 + y)$ dm-esek, akkor a másikéi $(1,5 - y)$ dm hosszúak, a két terület összege pedig

$$T(y) = (1,5 + y)^2 + (1,5 - y)^2 = 2y^2 + 2 \cdot 1,5^2 = 2y^2 + 4,5 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

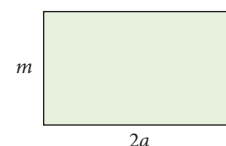
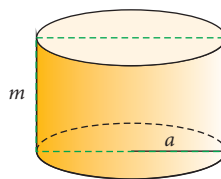
Ez akkor a legkisebb, amikor $y = 0$, vagyis a két négyzet ugyanakkora oldalú: $T(0) = 4,5 \text{ (dm}^2\text{)}$. Ha az y -t növeljük, akkor a két négyzet területösszege is nagyobb lesz. Mivel az y nem éri el az 1,5-et, a területösszegnek nincs legnagyobb értéke.

Azt tapasztaljuk, hogy

$$4,5 \leq T(y) < 9.$$

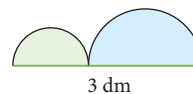
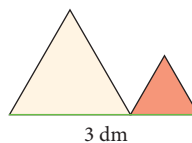


- 2.** Van-e maximális felszínű azok között a forgáshengerek között, amelyek tengelymetszetének a kerülete 20 cm ?



- 3.** Egy 3 dm-es szakaszt két részre bontunk. Hogyan változik többféle felosztás esetén

- a két rész hosszúságának a szorzata;
- a két rész fölé emelt négyzetek területének különbsége;
- a két rész fölé emelt félkörök területének összege;
- a két rész fölé emelt szabályos háromszögek területének különbsége?



TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Ábrázold az alábbi függvényeket derékszögű koordináta-rendszerben, ahol D_f a függvények értelmezési tartományát jelöli!

a) $f(x) = 3x - 5$ $D_f =]-\infty; \infty[$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ $D_f = [0; 8[$

c) $f(x) = \frac{2x+7}{3}$ $D_f =]-5; 4[$

Állapítsd meg a függvények értékkészletét!

2. Ábrázold az alábbi függvényeket derékszögű koordináta-rendszerben, ahol D_f a függvények értelmezési tartományát jelöli!

a) $f(x) = |x + 7| - 1$ $D_f =]-8; 0[$

b) $f(x) = 3|x| + 5$ $D_f = [0; \infty[$

c) $f(x) = -2|x - 4|$ $D_f =]-\infty; \infty[$

d) $f(x) = -|x + 1| + 3$ $D_f =]-2; 4[$

Állapítsd meg a függvények zérushelyeit, majd számolással végezz ellenőrzést!

3. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a valós számon értelmezett függvényeket!

a) $f(x) = |x|$ $g(x) = 1,5 \cdot |x|$ és $h(x) = \frac{|x|}{1,5}$

b) $f(x) = x^2$ $g(x) = 1,5 \cdot x^2$ és $h(x) = \frac{x^2}{1,5}$

4. Melyek azok a valós számok, melyeket a pontozott helyekre írva teljesül, hogy az alábbi, valós számok halmazán értelmezett függvényeknek egy zérushelye van?

a) $f(x) = 8x + \dots$

b) $f(x) = 3x^2 + \dots$

c) $f(x) = -|x + 7| + \dots$

d) $f(x) = x^2 + 4x + \dots$

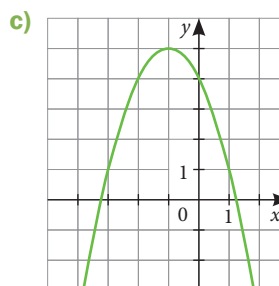
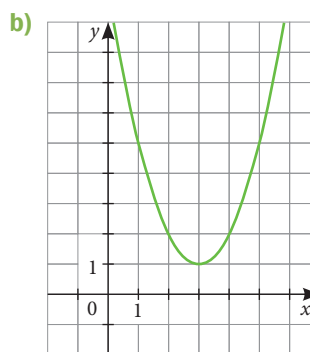
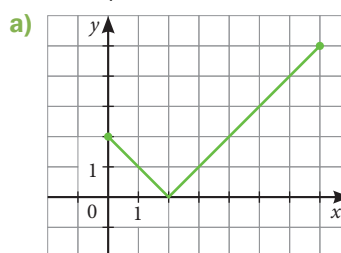
5. A teljes négyzetté kiegészítés módszerével alakítsd $a(x - u)^2 + v$ alakra az alábbi függvények hozzárendelési szabályait! A kapott alakról olvasd le a tengelypont koordinátáit!

a) $x \mapsto x^2 - 8x$

b) $x \mapsto x^2 + 6x + 2$

c) $x \mapsto x^2 - 10x + 28$

6. Add meg az alábbi függvénygrafikonokhoz tartozó hozzárendelési szabályt és a függvények értelmezési tartományát!



7. Ábrázold az $x \mapsto 4x^2 - 8x + 7$ függvényt úgy, hogy először a $x \mapsto 4x^2 - 8x$ függvényt ábrázolod a zérushelyei és a tengelypontja segítségével!

8. Ábrázold az $x \mapsto 0,6x^2 + 1,8x - 5$ függvényt úgy, hogy először a $x \mapsto 0,6x^2 + 1,8x$ függvényt ábrázolod a zérushelyei és a tengelypontja segítségével!

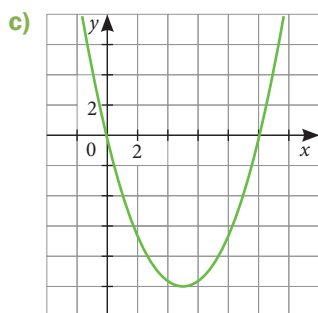
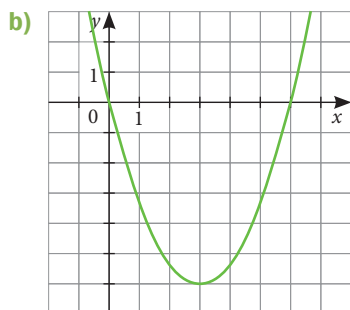
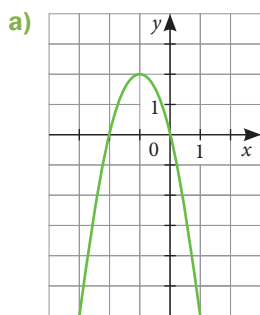
9. Ábrázold közös koordináta-rendszerben az alábbi, valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

a) $x \mapsto -2x^2 - 8x$ és $x \mapsto -2x^2 - 8x + 7$

b) $x \mapsto \frac{2}{3}x^2 - 4x$ és $x \mapsto \frac{2}{3}x^2 - 4x - 2$

- 10** A grafikonokról olvasd le a másodfokú függvény zérushelyeit és tengelypontját!

Írd fel ezekből a függvény hozzárendelési szabályát!



- 11** Adj meg olyan valós számot, amelyet a pontozott helyre írva olyan függvényt kapunk, melynek pontosan egy zérushelye van! A függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

- a) $f(x) = 6x^2 - 12x + \dots$
b) $f(x) = x^2 + (\dots) \cdot x + 9$

- 12** Határozd meg a következő, valós számok halmazán értelmezett függvények szélsőértékét! Melyiknek van maximuma, melyiknek minimuma?

- a) $f(x) = (x - 2)^2 + 10$
b) $g(x) = x^2 + 10x + 26$
c) $h(x) = -(x - 1)^2 + 9$
d) $k(x) = -x^2 + 12x + 21$

- 13** Állapítsd meg a következő függvények szélsőérték-helyeit és szélsőértékeit!

- a) $f(x) = (x - 4)^2 - 1$ $D_f = [2; \infty[$
b) $f(x) = -2x^2 + 8$ $D_f =]-2; 3]$
c) $f(x) = -(x + 2)^2 + 4$ $D_f = [-3; 1[$
d) $f(x) = 3x^2 + 6x$ $D_f =]-2; 1]$
e) $f(x) = 2x^2 + 8x + 7$ $D_f =]-\infty; -1[$

- 14** Egy 40 méter magas toronyban függőlegesen felfelé felhajtának egy kislabdát. A következő függvény azt adja meg, hogy t másodperc múlva hány méter magasan van a labda a talajszint fölött:

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 40$$

- a) Milyen magasan van 1 másodperc, 2 másodperc, 3 másodperc elteltével a labda?
b) Ábrázold koordináta-rendszerben a labda magasságát az idő függvényében! Alkalmasan válaszd meg a koordináta-rendszer egységeit!
c) Mikor van legmagasabban a labda?
d) Mikor ér a labda a talajszintre?

- 15** Egy 40 méter magas toronyból lefelé hajítunk egy kislabdát. A kislabda talajszinttől mért magasságát t másodperc múlva a következő függvény adja meg:

$$h(t) = -5t^2 - 10t + 40$$

- a) Ábrázold a függvényt!
b) Hány másodperc múlva ér földet a labda?
c) Hasonlítsd össze a grafikont a 14. feladat grafikojával!
d) A kislabda magassága minden pillanatban megegyezik egy olyan test magasságával, amelyet egy másik, magasabb toronyból, kezdősebesség nélkül, néhány másodperccel hamarabb elejtettek. Milyen magas lenne ez a másik torony, és hány másodperccel hamarabb kellett volna elejteni a testet?

- 16** Add meg a p paraméter értékét úgy, hogy a függvény (-3) -ban vegye fel a szélsőértékét!

$$x \mapsto 4x^2 + px - 3$$

Mennyi a függvény szélsőértéke? Ez minimum vagy maximum?

- 17** Az alábbi függvénynek két zérushelye van, 0-ban és 5-ben. Mennyi a paraméterek értéke?

$$x \mapsto -0,6x^2 + bx + c$$

- 18** Ábrázold a függvényt!

$$[-1; 3,5] \rightarrow \mathbf{R} \quad x \mapsto |-2x^2 + 6x|$$

Határozd meg a szélsőértékeit, szélsőérték-helyeit és az értékkészletét!

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Oldjuk meg a teljes négyzetté kiegészítéssel a következő egyenletet $x^2 - 6x + 8 = 0$!

Megoldás

$$x^2 - 6x = -8;$$

$$x^2 - 6x + 9 = -8 + 9 = 1;$$

$$(x - 3)^2 = 1;$$

$$x - 3 = 1 \text{ vagy } x - 3 = -1.$$

$$\text{Ha } x - 3 = 1, \text{ akkor } x = 1 + 3 = 4;$$

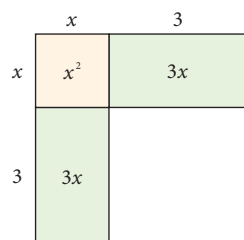
$$\text{ha } x - 3 = -1, \text{ akkor } x = -1 + 3 = 2.$$

Tehát ennek az egyenletnek két gyöke van, a 2 és a 4.

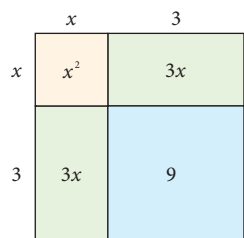
2. Az ókorban érdekes ábrákon keresztül oldottak meg ilyen feladatokat. Figyeld meg az $x^2 + 6x - 7 = 0$ egyenlet megoldását, egy régi módszer segítségével! Átrendezve: $x^2 + 6x = 7$

$$x^2 + 3x + 3x = 7.$$

Készítsük el ehhez a következő ábrát:



Az ábra területe tehát $x^2 + 6x$. Egészítsük ki négyzetté:



A négyzet területe $(x + 3)^2$. Ugyanakkor ez 9-cel nagyobb, mint az első ábra. Ezért:

$$(x + 3)^2 = 7 + 9 = 16.$$

$$\text{Ebből: } x + 3 = 4 \text{ vagy } x + 3 = -4,$$

$$\text{Átrendezve: } x = 1 \text{ vagy } x = -7.$$

3. Van-e zérushelye az f másodfokú függvénynek, és ha van, akkor melyik szám az?

a) $f(x) = x^2 + 4x - 21$

b) $f(x) = x^2 + 4x + 4$

c) $f(x) = x^2 + 4x + 12$

Megoldás

- a) Az a kérdés, van-e megoldása a valós számok halmazán az $x^2 + 4x - 21 = 0$ másodfokú egyenletnek.

Alkalmazzuk a teljes négyzetté alakítás módszerét:

$$(x + 2)^2 - 4 - 21 = 0,$$

$$(x + 2)^2 = 25.$$

Ebből következik, hogy

$$x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3 \quad \text{vagy} \quad x + 2 = -5 \Rightarrow x = -7.$$

Tehát az f függvénynek két zérushelye van: a 3 és a (-7) .

- b) $x^2 + 4x + 4 = 0,$

$$(x + 2)^2 = 0,$$

$$x + 2 = 0,$$

$$x = -2.$$

Az f függvénynek egy zérushelye van, a (-2) .

- c) $x^2 + 4x + 12 = 0,$

$$(x + 2)^2 - 4 + 12 = 0,$$

$$(x + 2)^2 = -8.$$

Ennek az egyenletnek nincs valós megoldása, az f függvénynek tehát nincs zérushelye.

FELADAT

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket! Töltsd ki a táblázatot a második oszlop alapján! Melyik az az eset, amikor nincs megoldása az egyenletnek?

a) $x^2 + 6x + 8 = 0$ b) $x^2 - 14x + 33 = 0$ c) $x^2 - 10x + 27 = 0$ d) $x^2 + 3x - 10 = 0$

Az egyenlet	$x^2 + 6x + 8 = 0$	$x^2 - 14x + 33 = 0$	$x^2 - 10x + 27 = 0$	$x^2 + 3x - 10 = 0$
Teljes négyzetté alakítás	$(x + 3)^2 - 9 + 8 = 0$ $(x + 3)^2 = 1$			
Megoldás	$x + 3 = 1 \Rightarrow x = -2$ vagy $x + 3 = -1 \Rightarrow x = -4$			
Az egyenlet gyökei	-2 és -4			
A gyökök összege	-6			
A gyökök szorzata	8			

Megjegyzés: A gyökök összege és szorzata érdekes kapcsolatot mutat a kiindulási egyenletekben szereplő együtthatókkal. Erre majd egy későbbi leckében visszatérünk.

2. Oldd meg teljes négyzetté kiegészítéssel a következő egyenleteket!

a) $x^2 + 2x = 15$ b) $x^2 + 3x = 28$ c) $x^2 - 12x + 20 = 0$ d) $x^2 + 10x + 16 = 0$

3. Oldd meg az egyenleteket:

a) $3x^2 = 48$ b) $x^2 - 5x = 0$ c) $-x^2 + 8x - 12 = 0$.

4. Egy társaságban mindenki mindenkivel egyszer kezet fogott. Összesen 55 kézfogás történt. Hányan vannak a társaságban?

HÁZI FELADAT

1. Oldd meg a teljes négyzetté kiegészítés módszerével az alábbi egyenleteket!

a) $x^2 + 14x = 15$ b) $x^2 + 9,6x = 10,6$

2. Oldd meg az egyenleteket!

a) $x^2 - 9x + 21,25 = 0$ b) $x^2 - 65,61 = 0$

3. Van-e zérushelye a következő függvényeknek, és ha van, akkor melyik szám az?

a) $f(x) = x^2 + 4,6x$
b) $g(x) = x^2 + 9,2x + 21$
c) $h(x) = x^2 - 1,8x + 2,1$

RÁADÁS

1. Egy tréfás kedvű kereskedő annyi forintért kínálta az alma kilóját, ahány kiló almát vitt a piacra. Amikor már eladott 30 kilót, akkor új árat írt ki: ez ismét csak annyi forint volt, ahány kiló alma még eladatlan maradt. Ezen az áron eladta az összes megmaradt almáját. Így annyi lett a bevétele, mintha az egész mennyiséget 79 forintos kilónkénti áron adta volna el. Hány kiló almát vitt a piacra a kereskedő?

2. Bence egy rajzlapra „pontokat” rajzolt, Csilla pedig minden lehetséges módon egy-egy „egyenest” rajzolt két-két megadott ponton át.
- a) Legfeljebb hány különböző egyenest rajzolhatott Csilla, ha Bence 3 pontot adott meg?
- b) Megadhat-e Bence 5 pontot úgy, hogy Csilla csak egy egyenest tudjon rajzolni?
- c) Csilla végül 21 egyenest tudott megrajzolni. Legalább hány pontot rajzolt a rajzlapra Bence?

KIDOLGOZOTT FELADAT

Oldjuk meg a következő egyenleteket:

a) $3x^2 + 5x + 1 = 0$ b) $ax^2 + bx + c = 0$, ahol $a \neq 0$.

Megoldás

a) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

Szorozzuk meg az egyenletet 4·3=12-vel!

$$36x^2 + 60x + 12 = 0$$

$$36x^2 + 60x = -12$$

A bal oldal alakításához használjuk fel, hogy

$$(6x + 5)^2 = 36x^2 + 60x + 25$$

Ezt felhasználva:

$$(6x + 5)^2 - 25 = -12$$

$$(6x + 5)^2 = 25 - 12 = 13$$

Ebből $(6x + 5)$ értéke $\sqrt{13}$ vagy $-\sqrt{13}$.

$$6x = -5 + \sqrt{13} \quad \text{vagy} \quad 6x = -5 - \sqrt{13}.$$

$$x = \frac{-5 + \sqrt{13}}{6} \quad \text{vagy} \quad x = \frac{-5 - \sqrt{13}}{6}$$

b) $ax^2 + bx + c = 0$, ahol $a \neq 0$.

Szorozzuk meg az egyenletet $4a$ -val!

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

A bal oldal alakításához használjuk fel, hogy

$$(2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$$

Ezt felhasználva:

$$(2ax + b)^2 - b^2 = -4ac$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Innentől a gondolatmenetünk 3-felé válik:

1. Ha $b^2 - 4ac < 0$, akkor nincs megoldás.

2. Ha $b^2 - 4ac = 0$, akkor

$$(2ax + b)^2 = 0, \text{ s ebből } 2ax = -b, \quad x = -\frac{b}{2a}$$

3. Ha $b^2 - 4ac > 0$, akkor

$$2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{vagy} \quad 2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac};$$

$$2ax = -b + \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{vagy} \quad 2ax = -b - \sqrt{b^2 - 4ac};$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{vagy} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

ELMÉLET

Ha az a , b és a c betű egy-egy adott valós számot jelöl, ahol $a \neq 0$, akkor az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek 0, 1 vagy 2 gyöke van a valós számok körében.

Ha $b^2 - 4ac < 0$, akkor az egyenletnek nincs gyöke a valós számok körében.

Ha $b^2 - 4ac = 0$, akkor az egyenletnek 1 gyöke van, a $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ szám. Ezt az egyenlet kettős gyökének (vagy kétszeres gyökének) nevezzük.

Ha $b^2 - 4ac > 0$, akkor az egyenletnek 2 gyöke van, a $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ és a $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ szám.

Ezt a két gyököt együtt így szoktuk felírni: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Ez a másodfokú egyenlet **megoldóképlete**.

Látható, hogy a gyökök száma attól függ, hogy a $(b^2 - 4ac)$ szám *negatív*, *0* vagy *pozitív*.

A $(b^2 - 4ac)$ számot a másodfokú egyenlet **diszkriminánsának** nevezzük és D -vel jelöljük.

(A *diszkrimináns* latin eredetű szó, eredeti jelentése: *megkülönböztető, osztályozó*.)

Például

- a $3x^2 + 7x + 5 = 0$ egyenlet esetében $a = 3$, $b = 7$ és $c = 5$, a diszkrimináns $D = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 49 - 60 = -11 < 0$, ezért ennek az egyenletnek nincs gyöke;
- az $x^2 + 8x + 16 = 0$ egyenlet esetében $a = 1$, $b = 8$ és $c = 16$, a diszkrimináns $D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$, ezért ennek az egyenletnek egy gyöke van, mégpedig $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2} = -4$; (ezt egyszerűbben is megkaphatjuk, mert $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$);
- a $2x^2 + 15x - 3 = 0$ egyenlet esetében $a = 2$, $b = 15$ és $c = -3$, a diszkrimináns $D = 15^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 225 + 24 = 249 > 0$, ezért ennek az egyenletnek két gyöke van: $x_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{249}}{2 \cdot 2} = \frac{-15 \pm \sqrt{249}}{4}$.
 $x_1 = \frac{-15 + \sqrt{249}}{4} \approx \frac{-15 + 15,78}{4} = 0,195$; $x_2 = \frac{-15 - \sqrt{249}}{4} \approx \frac{-15 - 15,78}{4} = -7,695$.

FELADAT

1. ⚡ Oldd meg a megoldóképlet segítségével az egyenleteket!
a) $4x^2 + 12x - 27 = 0$; b) $5x^2 + 4x - 9 = 0$.
2. ⚡ Oldd meg a megoldóképlet segítségével a következő egyenleteket!
a) $-2x^2 - 3x + 44 = 0$ c) $5x^2 + 11x = 8$
b) $6 - 5x + x^2 = 0$
3. ⚡ Vizsgáld az $x \mapsto -0,12x^2 + 80x - 10\,000$ másodfokú függvényt!
a) Határozd meg a függvény zérushelyeit a megoldóképlet segítségével!
b) Vázold a függvény grafikonját!
c) Állapítsd meg, hol van szélsőértéke a függvénynek, és mennyi annak az értéke!
4. ⚡ Egészítsd ki a $3x^2 + 6x + \dots = 0$ egyenletet úgy, hogy az $\mathbf{R}$ alaphalmazon
a) 2; b) 1; c) 0
gyöke legyen!

HÁZI FELADAT

1. ⚡ Oldd meg a megoldóképlet segítségével az egyenleteket!
a) $x^2 + 2,5x - 6 = 0$ b) $12x^2 - 8x - 15 = 0$.
2. ⚡ Oldd meg a megoldóképlet segítségével az egyenleteket! Ahol szükséges, rendezd megfelelő alakba az egyenletet!
a) $6x^2 - 40 = x$
b) $35 - 36x = -9x^2$
3. ⚡ Vázold a zérushelyek és a tengelypont segítségével az $f: x \mapsto -2x^2 + 4x + 10,5$ függvény grafikonját!

RÁADÁS

Oldd meg a megoldóképlet segítségével a másodfokú egyenleteket!

- a) $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$
- b) $x^2 - (1 - \sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

KIDOLGOZOTT FELADAT

Oldjuk meg az egyenleteket!

1. $-0,2x^2 + 4,4x = 17$

Megoldás:

Rendezzük az egyenletet:

$$-0,2x^2 + 4,4x - 17 = 0$$

A számológépnek „mindegy”, de a hibalehetőségek csökkentése érdekében érdemes osztani $(-0,2)$ -vel, hogy az x^2 együtthatója pozitív legyen, és egész szám:

$$x^2 - 22x + 85 = 0$$

Megoldóképletből: $x_1 = 17$ és $x_2 = 5$.

2. $6x^2 - 7x = 0$.

Megoldás:

Ezt az egyenletet szorzattá alakítással is megoldhatjuk. Ha azonban a megoldóképletet szeretnénk használni, akkor figyeljünk arra, hogy az együtthatók: $a = 6$; $b = -7$ és $c = 0$.

A megoldások: 0 és $\frac{7}{6}$.

3. $(2x - 5)^2 + (x + 3)^2 = 25$

Megoldás:

Ahhoz, hogy a megoldóképletet használni tudjuk, bontsuk fel a zárójeleket, majd rendezzük az egyenletet:

$$4x^2 - 20x + 25 + x^2 + 6x + 9 = 25$$

$$5x^2 - 14x + 9 = 0$$

A megoldások: 1 és 1,8.

4. $\frac{3x^2 - 11}{2} + \frac{x^2 + 1}{3} = \frac{5x + 3}{6}$

Megoldás:

Szorozzuk az egyenletet 6-tal, majd rendezzük a megfelelő alakra:

$$3(3x^2 - 11) + 2(x^2 + 1) = 5x + 3$$

$$9x^2 - 33 + 2x^2 + 2 = 5x + 3$$

$$11x^2 - 5x - 34 = 0$$

Megoldóképlettel: $x = 2$ vagy $x = \frac{34}{22}$.

FELADAT

1. ☞ Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

a) $3x^2 + 8x = 0$ b) $-9x^2 + 27 = 0$

2. ☞ Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

a) $7x^2 - 21x + 3 = x^2 + 8x - 6$

b) $12x^2 - 22x - 3 = 2x^2 + 7x + 18$

3. ☞ Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

a) $(x - 4)^2 + (x + 2)^2 = 29 - x$

b) $(3x - 1)^2 = (2x + 3)^2 - 17$

4. ☞ Határozd meg a következő függvény zérushelyeit!

Értelmezési tartomány a valós számok halmaza.

a) $x \mapsto \frac{x^2}{6} + \frac{2x}{3} - 1$ b) $x \mapsto -\frac{x^2}{2} + \frac{2x}{3} - \frac{5}{6}$

5. ☞ Az $ax^2 + bx + c = 0$ alakú másodfokú egyenleteket a megoldóképlet segítségével oldunk meg. A képletbe behelyettesítve ezeket kaptuk:

a) $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 2 \cdot 2,5}}{2 \cdot 2}$

b) $x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{6}$

Írd fel másodfokú egyenleteket!

6. ☞ Add meg a hiányzó együttható értékét úgy, hogy az egyenlet diszkriminánsa 0 legyen!

a) $7x^2 + 6x + \dots = 0$

c) $2x^2 + \dots x - 9 = 0$

b) $\dots x^2 - 5x - 2 = 0$

7. ☞ Összeszoroztunk két egymást követő egész számot. Az eredmény 1332. Melyik ez a két szám? Hány megoldása van a feladatnak?

HÁZI FELADAT

1. Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

a) $7x^2 - 12x + 7 = x^2 + 8x + 7$

b) $9,6x^2 + 2,5x + 3,2 = 2,1x^2 + 2,5x + 5,7$

2. a) $(x+5)^2 + (x-4)^2 = 118 - x$

b) $(3x-7)^2 = (7x+3)^2 + 48$

3. Összeszoroztunk egy egész számot egy nála 6-tal kisebb számmal. Az eredmény 391. Melyik ez a két szám? Hány megoldás van?

RÁADÁS

1. Némely számológép segítségével könnyedén meghatározhatod a másodfokú egyenlet mindkét megoldását. Ezt a funkciót többnyire a **MODE** gomb megnyomásával tudod elérni. Itt válaszd ki az **EQN** (equation = egyenlet) opciót, majd ezen belül a másodfokú egyenletet (**QUAD** vagy $ax^2 + bx + c = 0$)!

Az egyenlet együtthatóit az a , b , c értékek alatt adhatod meg, az **=** gomb megnyomásával. A negatív együtthatók megadásához használd a **(-)** gombot! A mezők között a nyílombok segítségével is mozoghatsz. Az utolsó együttható megadása után az **=** gomb ismételt megnyomásával kapod meg az első és a második megoldást is. Az együtthatók között a fel-le gombokkal is tudsz váltani.

Próbáld ki a számológépedet az órán megoldott feladatok végeredményeinek ellenőrzésére!

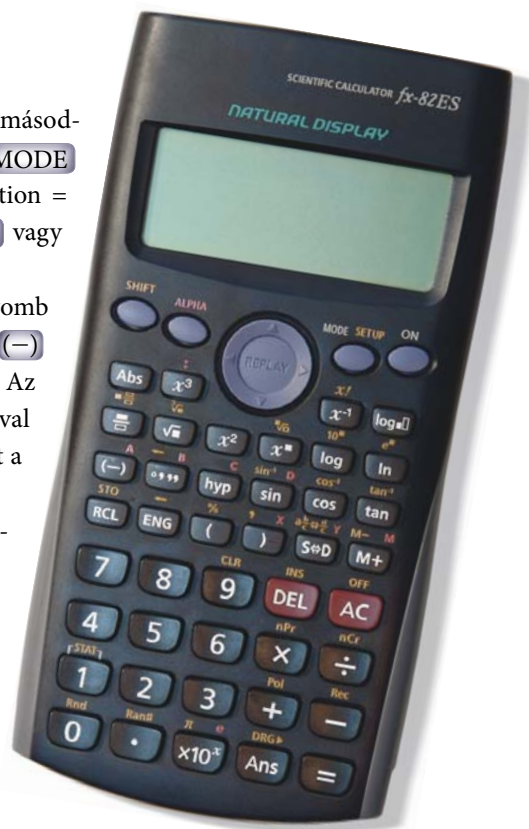
2. a) Számold ki és figyeld meg a következő egyenletek gyökeit!

$10x^2 - 29x + 10 = 0$

$6x^2 + 13x + 6 = 0$

b) Bizonyítsd be, hogy ha egy másodfokú egyenlet általános alakjában $a = c$, akkor az egyenlet gyökei (ha vannak), egymás reciprokai!

c) Mely B és C értékekre lesz az $x^2 + Bx + C = 0$ másodfokú egyenletnek pontosan két gyöke, melyek egymás reciprokai?



KIDOLGOZOTT FELADAT

Melyik egyenletnek hány gyöke van?

$$5x^2 - 3x + 1 = 0 \quad -7x^2 + x + 4 = 0 \quad 10x^2 - 29x + 10 = 0$$

Megoldás

Az egyenlet	a	b	c	Diszkrimináns	Gyökök száma
$5x^2 - 3x + 1 = 0$	5	-3	1	$9 - 20 < 0$	0
$-7x^2 + x + 4 = 0$	-7	1	4	$1 + 112 > 0$	2
$10x^2 - 29x + 10 = 0$	10	-29	10	$841 - 400 > 0$	2

Felhasználtuk, hogy

- a másodfokú egyenlet gyökeinek száma a diszkriminánstól függ;
- az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) egyenlet diszkriminánsa: $b^2 - 4ac$.

FELADAT

1. Töltsd ki a táblázatot a füzetedben!

Az egyenlet	a	b	c	Diszkrimináns	Gyökök száma
$9x^2 - 5x - 1 = 0$					
$-x^2 + x - 4 = 0$					
$x^2 - 3,8x = 0$					
$16x^2 + 9 = 24x$					

2. Oldd meg az egyenleteket!

- a) $-0,25x^2 - 1,25x + 1,5 = 0$
 b) $47x = 42 + 10x^2$
 c) $77 + 25x + 2x^2 = 0$

3. Van-e három olyan egymást követő egész szám, amelyek négyzetének összege egyenlő a következő két egész szám négyzetének összegével? Ha van, melyik ez a három egész szám, ha nincs, miért nincs?

4. Írj az $x^2 + bx - 12 = 0$ egyenletbe a b betű helyére valós számokat! Lehetséges-e, biztos-e, lehetetlen-e, hogy a gyökök száma

- a) 0; b) 1; c) 2?

5. Oldd meg az előző feladatot az $x^2 + bx + 12 = 0$ egyenlet esetére vonatkozóan is!

HÁZI FELADAT

1. Oldd meg az egyenleteket!

- a) $0,125x^2 - 3,125x + 18 = 0$
 b) $16 - 25x^2 = 0$
 c) $7x - 0,1x^2 = 0$

2. Határozd meg, hogy a következő egyenletek közül mely esetben lesz a diszkrimináns pozitív, negatív, illetve 0?

- a) $\frac{1}{2}(x-5)^2 - \frac{x}{3} = \frac{x}{6}$
 b) $(2-x)^2 - (3-x)^2 = (6-x)^2$
 c) $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} = \left(\frac{3x-1}{2}\right)^2 + \frac{7}{24}$

3. Melyik az a három egymást követő egész szám, amelyek közül a középső 1-gyel nagyobb, mint az első és a harmadik szám szorzata?

1 Bháskara, az egyik leghíresebb hindu tudós a XII. század közepén élt Udzsainban. Azt írják róla, hogy megtalálta az $x^2 - 45x = 250$ másodfokú egyenlet pozitív gyökét. Vajon hogyan?

a) Keresd meg az egyenlet mindkét gyökét a megoldóképlettel!

b) Bontsd 2 tényező szorzatára az $(x^2 - 45x)$ -et is és a 250-et is, ennek alapján keresd meg a pozitív gyököt!

c) Találd ki, hogyan kaphatnád meg ugyanebből a szorzatalakból az egyenlet negatív gyökét!

2 Bháskara arról is híres, hogy írt a leánya számára egy feladatgyűjteményt, *Lilavati* (elbűvölő) címen. Ebből vettük a következő versikét:

A majmok két víg csapatban
játszadognak egy lugasban.
Nyolcadrészük négyzetét vedd,
s megtudod, hány verekedett.

Amott tizenketten vannak,
hangoskodnak, ugrándoznak.
Mondd meg gyorsan, hány majom van
összesen a két csoportban!

3 Melyik egyenletnek hány gyöke van?

$$x^2 + 4\sqrt{3}x + 12 = 0 \quad x^2 - 4\sqrt{2}x + 6 = 0$$

$$u^2 - uk - 6k^2 = 0 \quad (u \text{ az ismeretlen, } k \text{ pedig paraméter})$$

$$u^2 + uk - 6k^2 = 0 \quad (k \text{ az ismeretlen, } u \text{ pedig paraméter})$$

Megoldás

Az egyenlet	a	b	c	Diszkrimináns	Gyökök száma
$x^2 + 4\sqrt{3}x + 12 = 0$	1	$4\sqrt{3}$	12	$48 - 48 = 0$	1
$x^2 - 4\sqrt{2}x + 6 = 0$	1	$-4\sqrt{2}$	6	$32 - 24 > 0$	2
$u^2 - uk - 6k^2 = 0$ Itt u az ismeretlen, k pedig paraméter	1	$-k$	$-6k^2$	$k^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6k^2) = 25k^2 \geq 0$	k -től függően 1 vagy 2
$u^2 + uk - 6k^2 = 0$ Itt k az ismeretlen, u pedig paraméter	-6	u	u^2	$u^2 - 4 \cdot (-6) \cdot u^2 = 25u^2 \geq 0$	u -től függően 1 vagy 2

4 Oldjuk meg a következő egyenletet a megoldóképlettel!

$$u^2 + ku - 6k^2 = 0, \text{ ahol } k \text{ egy valós paraméter.}$$

Megoldás

$$\text{A diszkrimináns: } k^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6k^2) = 25k^2 = (5k)^2.$$

A diszkrimináns k minden értéke esetén nemnegatív, azaz a megadott egyenletnek minden esetben van megoldása. Két esetet különböztetünk meg.

– Ha $k = 0$, akkor az $u^2 + ku - 6k^2 = 0$ egyenlet az $u^2 = 0$ egyenletet adja. Ennek egyetlen megoldása a 0.

$$\text{– Ha } k \neq 0, \text{ akkor } u_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{25k^2}}{2} = \frac{-k \pm 5k}{2}; \quad u_1 = \frac{-k + 5k}{2} = 2k \text{ és } u_2 = \frac{-k - 5k}{2} = -3k.$$

Ebben az esetben tehát az egyenlet megoldáshalmaza kételemű: $\{-3k; 2k\}$.

Oldd meg az előző feladat maradék három egyenletét is a megoldóképlet segítségével!

5 Adjuk meg az m valós paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek egyetlen valós megoldása legyen!

a) $x^2 - 4m = 0$

b) $x^2 + 2mx + 5m - 4 = 0$

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Készítsünk olyan másodfokú egyenletet, melynek gyökei 2 és 5.

Az $(x - 5)(x - 2) = 0$ állítás akkor és csakis akkor igaz, ha $x - 5 = 0$ (ami azt jelenti, hogy $x = 5$) vagy $x - 2 = 0$ (ami azt jelenti, hogy $x = 2$). Vagyis az $(x - 5)(x - 2) = 0$ egyenlet gyökei: 2 és 5.

Beszorozva:

$$(x - 5)(x - 2) = x^2 - 5x - 2x + 10 = x^2 - 7x + 10.$$

Tehát az $x^2 - 7x + 10 = 0$ egyenlet gyökei: 2 és 5.

Azt mondjuk, hogy az $(x - 5)(x - 2)$ forma az $x^2 - 7x + 10$ polinom **gyöktényezős alakja**.

FELADAT

1. Készíts te is másodfokú egyenleteket!

Az egyenlet gyökei legyenek: **a)** 1 és 3 **b)** 2 és -4 **c)** 7 és 8 **d)** -6 és -5

ELMÉLET

Legyenek a , b és c adott valós számok, és $a \neq 0$. Foglalkozzunk az $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinommal!

- Azokat a számokat, amelyeket az x helyébe írva $ax^2 + bx + c = 0$, a polinom **zérushelyeinek** mondjuk.
- Bizonyítható, hogy ha az $ax^2 + bx + c$ polinom zérushelyei x_1 és x_2 , akkor $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Ezt az utóbbi alakot a polinom **gyöktényezős alakjának** nevezzük.

Például

- a $3x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet gyökei 1 és $-\frac{2}{3}$, ezért a $3x^2 - x - 2$ polinom gyöktényezős alakja $3(x - 1)\left(x + \frac{2}{3}\right)$,
- a $3x^2 - x + 2 = 0$ egyenletnek a valós számok halmazában nincs gyöke, ezért a $3x^2 - x + 2$ polinomnak nincs gyöktényezős alakja.
- a $4x^2 - 12x + 9$ polinomnak egy gyöke van, az 1,5; a polinom gyöktényezős alakja $4(x - 1,5)(x - 1,5)$.

Megjegyzés

Az 1,5-et $4x^2 - 12x + 9 = 0$ egyenlet **kettős gyökének** (vagy **kétszeres gyökének**) nevezzük.

FELADAT

2. Alakítsd szorzattá a gyöktényezős alak segítségével a másodfokú polinomokat!

a) $2x^2 - 9x - 5$ **b)** $5x^2 + 13x + 8$

KIDOLGOZOTT FELADAT

- 2.** Keressünk összefüggést az $x^2 - 10x + 16 = 0$ egyenlet gyökei és együtthatói között!

Megoldás

A megoldóképlet segítségével megkaphatjuk, hogy a két gyök 2 és 8. Használjuk a polinom gyöktényezős alakját!

$$(x - 2)(x - 8) = x^2 - 10x + 16$$

Végezzük el a bal oldali szorzást:

$$(x - 2)(x - 8) = x^2 - 2x - 8x + 2 \cdot 8 = x^2 - (2 + 8)x + 2 \cdot 8$$

A másodfokú egyenlet együtthatói ebben a feladatban könnyen megkaphatók a gyökökből: b a két gyök összegének ellentettje, c pedig a két gyök szorzata. Ez máskor is teljesül, ha az egyenlet főegyütthatója: $a = 1$.

ELMÉLET

Az $x^2 - 10x + 16 = 0$ egyenlet két gyöke: 2 és 8. Ezeknek az összege 10 (az x együtthatójának az ellentettje), szorzata 16 (a nulladfokú tag);

az $x^2 + 7x - 18 = 0$ egyenlet két gyöke: 2 és -9 . Ezeknek az összege (-7) (az x együtthatójának az ellentettje), szorzata (-18) (a nulladfokú tag).

Általánosan is igaz:

Ha a, b, c adott valós számok, $a \neq 0$ és az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet két gyöke x_1 és x_2 ,

akkor $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ és $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Ezt a két képletet a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggéseknek, másképp: Viète-formuláknak nevezzük.

Például a $3x^2 - 8x + 4 = 0$ egyenlet két gyöke 2, illetve $\frac{2}{3}$. A gyökök összege éppen $\frac{8}{3}$, a szorzatuk pedig $\frac{4}{3}$.

FELADAT

- 3.** Oldd meg a $6x^2 - 23x + 20 = 0$ egyenletet a megoldóképlettel! Ellenőrizd a Viète-formulákat!

- 4.** A gyökök kiszámítása nélkül válaszolj a kérdésekre a $6x^2 - 7x + 2 = 0$ egyenletről:

- a) Hány valós gyöke van?
- b) Mennyi a gyökök összege?
- c) Mennyi a gyökök szorzata?

- 5.** Adj meg olyan egész együtthatós, másodfokú egyenletet, melynek gyökei

a) $\frac{1}{3}$ és $-\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{7}$ és $-\frac{4}{9}$

- 6.** Egy egyenletről ennyit tudunk: $x^2 + \dots x + 12 = 0$. Mi lehet a középső tag együtthatója, ha tudjuk, hogy minden együttható egész szám, és az egyenlet gyökei is egész számok?

HÁZI FELADAT

- 1.** Alakítsd szorzattá a gyöktényezős alak segítségével a másodfokú polinomokat!

- a) $x^2 - 26x + 120$ c) $10x^2 + x - 21$
- b) $x^2 - 7x - 18$ d) $-5x^2 + 17x - 14$

- 2.** Oldd meg a $12x^2 - 17x + 6 = 0$ egyenletet a megoldóképlettel! Ellenőrizd, érvényesek-e itt a Viète-formulák!

- 3.** Adj meg olyan egész együtthatós polinomot, melynek zérushelyei:

- a) $\frac{2}{5}$ és $\frac{7}{11}$;
- b) $-\frac{6}{7}$ és $\frac{9}{2}$.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Mely számok lehetnek az $x^2 - 5x + 6 = 0$ egyenlet gyökei, és melyek az $x^2 + 8x - 9 = 0$ egyenlet gyökei?

Megoldás

Az $x^2 - 5x + 6 = 0$ egyenlet esetében a gyökök összege 5 és a szorzatuk 6. Ez a 2-re és a 3-ra igaz, tehát a gyökök 2 és 3; az $x^2 + 8x - 9 = 0$ egyenlet esetében a gyökök összege (-8) és a szorzatuk (-9) . Ez az 1-re és a (-9) -re igaz, tehát a gyökök: 1 és -9 .

A megoldásokat fejben ellenőrizhetjük.

Egy másodfokú egyenletet látva, melynek főegyüttható 1, elgondolkozhatunk azon, tudunk-e mondani két olyan számot, melyek szorzata az egyenlet konstans tagja, összege pedig az egyenlet elsőfokú együtthatójának ellentettje. Ha egész számok között keressük a megoldásokat, akkor azt futtassuk végig magunkban, vajon milyen módon tudjuk két egész szám szorzataként felírni a konstans tagot. Van-e ezek között olyan, hogy a két egész szám összege épp az elsőfokú tag együtthatójának ellentettje?

FELADAT

1. Oldd meg fejben a következő másodfokú egyenleteket!

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ c) $x^2 + 7x + 10 = 0$
b) $x^2 - 12x + 20 = 0$ d) $x^2 + x - 20 = 0$

2. Két szám négyzetének összegét a számok kiszámítása nélkül meghatározhatjuk csak az összegükből és a szorzatukból.

$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2(ab)$. Alkalmazd ezt az összefüggést, valamint a Viète-formulákat, és határozd meg az egyenletek gyökeinek négyzetösszegét anélkül, hogy a gyököket kiszámolnád! Érdekesség, hogy ez az eljárás akkor is ad egy eredményt, ha az egyenletnek nincsenek valós gyökei. Ezért mindenképpen ellenőrizd a diszkrimináns segítségével, hogy vannak-e valós gyökök!

a) $x^2 + 4x + 7 = 0$ b) $x^2 + 4x - 7 = 0$

3. A $2x^2 + 3x - 7 = 0$ egyenletben határozd meg a gyökök kiszámítása nélkül:

a) a gyökök reciprokanak összegét,
b) a gyökök köbeinek összegét!
Ellenőrizd, hogy vannak-e valós gyökök!

4. A $2x^2 - 3x - 7 = 0$ egyenletben határozd meg a gyökök kiszámítása nélkül:

a) a gyökök különbségének négyzetét,
b) a gyökök különbségét,
c) a gyökök négyzeteinek különbségét!
Ellenőrizd, hogy vannak-e valós gyökök!

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. A briliáns értéke egyenesen arányos a tömegének négyzetével.

a) Mutassuk meg, hogy ha egy 12 karátos (1 karát = 0,2 gramm) briliánt kettévágunk, akkor értéke csökken!

- b) Igazoljuk, hogy a két részre darabolás után akkor lesz a két darab együttes értéke a legkisebb, ha mindkét darab 6 karátos!



Megoldás

- a) A briliáns értéke $E = k \cdot m^2$, ahol k egy (pozitív) arányossági tényező. Ez a tényező azt mutatja meg, hogy mennyi az 1 karátos briliáns értéke.

Az eredeti 12 karátos briliáns értéke

$$E_1 = k \cdot 12^2 = 144 \cdot k.$$

Ha ezt kettévágjuk, és az egyik darab tömege x karát ($0 < x < 12$), akkor a másik darab tömege $12 - x$ karát. A két darab értékének összege:

$$E_2 = k \cdot x^2 + k \cdot (12 - x)^2 = k \cdot (2x^2 - 24x + 144).$$

Azt kell bizonyítanunk, hogy

$$k \cdot (2x^2 - 24x + 144) < 144 \cdot k, \text{ ha } 0 < x < 12.$$

A pozitív k -val mindkét oldalt elosztva és rendezve az $x^2 - 12x < 0$ egyenlőtlenséghez jutunk.

Ez pedig minden esetben igaz, ha $0 < x < 12$, hiszen $x^2 - 12x = x(x - 12)$, és itt a szorzat két tényezője különböző előjelű.

Ezzel beláttuk, hogy a briliáns értéke csökken, ha két darabra vágjuk.

- b) Mivel $E_2 = 2k \cdot (x - 6)^2 + 72 \cdot k$, ezért a két darab együttes értéke abban az esetben lesz a legkisebb, ha $x = 6$. Ez pedig azt jelenti, hogy éppen két egyenlő tömegű darabra vágtuk szét a briliánt.

Az is látható, hogy ebben az esetben a két darab együttesen is csak az eredeti értéknek a felét éri ($144 \cdot k$ helyett csak $72 \cdot k$ az értéke).

FELADAT

5. Mutasd meg, hogy ha az eredeti briliánt kettőnél több darabra vágjuk szét, akkor is csökken az értéke!

HÁZI FELADAT

1. Oldd meg fejben a másodfokú egyenleteket!
- a) $x^2 - 25x + 100 = 0$ c) $x^2 + 7x - 78 = 0$
 b) $x^2 - 5x - 36 = 0$ d) $x^2 + 0,2x - 0,48 = 0$
2. A $6x^2 - 11x - 2 = 0$ egyenletben határozd meg a gyökök kiszámítása nélkül a két gyök négyzete reciprokának összegét!
 Ellenőrizd, hogy vannak-e valós gyökök!

3. Írj fel olyan másodfokú egyenletet, melynek két gyöke a $4x^2 + 3x - 5 = 0$ egyenlet gyökeinek
- a) ellentettje;
 b) reciproka!

EMELT SZINT

Bizonyítsuk be a Viète-formulákat!

Legyen az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet két gyöke x_1 és x_2 , jelöljük D -vel a $(b^2 - 4ac)$ diszkriminánst. Ekkor a megoldóképletnek megfelelően $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ és $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$. Írjuk fel a gyökök összegét és szorzatát!

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Ezt akartuk bizonyítani.

[François Viète (1540–1603) francia matematikus volt. Az ő nevéhez fűződik a másodfokú egyenlet megoldásainak betűk segítségével történő felírása és a tételben szereplő két összefüggés is. Ő volt az első, aki fel tudta írni a π -t egy sorozat elemeinek szorzataként:

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} \dots$$

Descartes – noha ezt egész életében tagadta – nagy valószínűséggel Viète műveire is alapozta saját algebrai és geometriai munkásságát.]



CSOPORTMUNKA

Alkossatok négyfős csoportokat!

1. Oldjátok meg az 1–4. feladatokat, a 4. feladat eredményét írátok fel a táblára! Az a csoport nyer, amelyik először írja fel a jó eredményt. A verseny addig tart, amíg mindegyik csoport felírja eredményét a táblára. Ez alatt az idő alatt egyik csoport egyszer javíthat.

Jó tanács: érdemes egy kicsit gondolkodni, mielőtt nekiugrotok a megoldóképletnek! Egyes esetekben számolás nélkül is fel lehetek a kérdésekre.

1. feladat

Mik az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei, ha ebben az egyenletben az a szám az $x^2 - 7x + 6 = 0$ egyenlet nagyobbik gyöke, a b szám az $\frac{5-x}{2x-1} = \frac{15-4x}{3x+1}$ egyenlet gyöke, a c szám pedig a $(3x+7)(3x+5) = 0$ egyenlet gyökeinek az összege?

A két gyököt jelöljétek a K és az L betűvel!

2. feladat

Mennyi az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökeinek a szorzata, ha ebben az egyenletben az a szám a $4x^2 - 12x + 9 = 0$ egyenlet gyökeinek a száma; $b = -1$, a c szám pedig az $x(3x+4) = 4$ egyenlet kisebbik gyöke?

Az eredményt jelöljétek az M betűvel!

3. feladat

Állapítsátok meg, hogy a következő egyenletek közül melyiknek hány gyöke van!
 $(x+7)(5-x) = 8$, $x^2 = 6x$, $4x^2 + x - 3 = 0$,
 $-3x^2 + 2x = 1$, $5 - x^2 = 6x + 14$, $2x^2 - 7x + 5 = 0$.

A kapott 6 szám összegét jelöljétek N -nel, a 6 szám szorzatát pedig P -vel!

4. feladat

Számítsátok ki, mennyi a $(K+L) \cdot N \cdot (M-P)$ szorzat!

A kapott számot írátok fel a táblára! Zárójelben tüntessétek fel a felírás időpontját!

2. Az első 3 helyezett csapat bemutatja, milyen egyszerű módszereket alkalmazott (például melyik egyenletet nem kellett megoldóképlettel megoldania, melyik esetben nem volt szüksége még a diszkrimináns felírására sem).

HÁZI FELADAT

1. Az alábbi másodfokú egyenletek közül melyikről dönthető el a diszkrimináns kiszámítása nélkül, hogy két különböző gyöke van, vagy hogy nincs gyöke? Miért?

- a) $3x^2 + 5 = 0$ c) $-2,8x^2 - 7,3x + 1,24 = 0$
 b) $3x^2 + 11x - 9,6 = 0$ d) $9,8x^2 + 8,8x = 0$

2. Alakítsd elsőfokú polinomok szorzatává a következő polinomokat!

- a) $x^2 - 10x + 21$
 b) $x^2 - 4x + 1$
 c) $2x^3 + 5x^2 + 6x$
 d) $2x^3 - 4x^2 - 6x$

- 3** A következő egyenletben hiányzik a harmadik együttható: $7x^2 + 4x + \dots = 0$
Adj olyan értéket a hiányzó együtthatónak, hogy az egyenlet gyökeinek száma:
- a) 0
b) 2.

- 4** A következő egyenletekben hiányzik egy együttható. Adj olyan értéket a hiányzó együtthatónak, hogy pontosan egy gyöke legyen az egyenletnek!
- a) $x^2 - \dots x + 16 = 0$ c) $x^2 - \dots x + 8 = 0$
b) $x^2 + 12x + \dots = 0$

EMELT SZINT

Paraméteres feladatok

- 1.** Melyik számot jelölheti a p , ha a $(p-2)x^2 + (2p-7)x + p = 0$ egyenletnek két különböző gyöke van?

Megoldás

Akkor van ennek az egyenletnek két különböző gyöke, ha

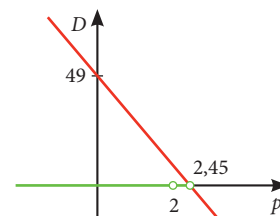
- másodfokú, vagyis $p-2 \neq 0$, és
- a diszkriminánsa pozitív.

Jegyezzük meg, hogy $p-2 \neq 0$, vagyis $p \neq 2$, és írjuk fel az egyenlet diszkriminánsát!

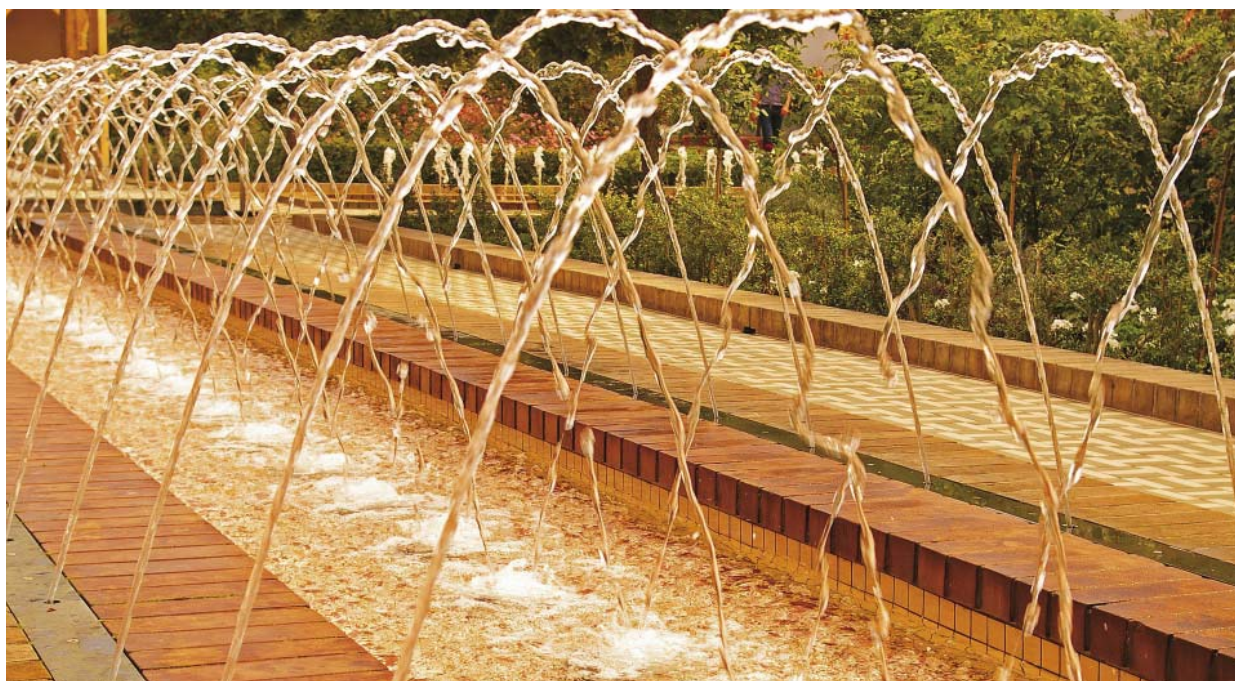
$$D = (2p-7)^2 - 4 \cdot (p-2) \cdot p = 4p^2 - 28p + 49 - 4p^2 + 8p = 49 - 20p.$$

$$49 - 20p > 0, \text{ ha } 20p < 49, \text{ vagyis } p < 2,45.$$

Tehát az adott egyenletnek akkor és csakis akkor van két különböző gyöke, ha $p < 2,45$, de nem egyenlő 2-vel. A p megfelelő értékeit a koordináta-rendszer vízszintes tengelyén zölddel jelöltük.



- 2.** Milyen számokat írunk a p betű helyére, ha azt akarjuk, hogy a $(p+2)x^2 + 6px + 4p + 1 = 0$ egyenletnek a valós számok halmazában 1 gyöke legyen? Melyik esetben melyik szám az egyenlet gyöke?
- 3.** Milyen p paraméter esetén lesz két különböző megoldása a következő egyenletnek:
 $(p^2 - 5p + 4,5)x^2 + (3p - 1)x + 2 = 0$?
- 4.** A $(p+3)x^2 + (p^2 + 6p + 1)x - 5p = 0$ egyenlet egyik gyöke az 5. Mi lehet a másik gyöke?



KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy derékszögű háromszög átfogója 58 cm hosszú, a nagyobb befogó 2 cm-rel hosszabb a kisebbiknél. Hány cm a befogók hossza?

Megoldás

Ha a rövidebb befogó hossza x cm, akkor a másik befogó hossza $(x + 2)$ cm. A Pitagorasz-tétel szerint tehát:

$$x^2 + (x + 2)^2 = 58^2.$$

Elvégezve a kéttagú összeg négyzetre emelését:

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 3364,$$

$$2x^2 + 4x - 3360 = 0.$$

Másodfokú egyenletet kaptunk. Osszuk el mindkét oldalt 2-vel: $x^2 + 2x - 1680 = 0$, majd alkalmazzuk a megoldóképletet!

$$x = 40 \quad \text{vagy} \quad x = -42.$$

A befogó hossza pozitív, ezért csak a 40 lehet megoldása a feladatunknak.

A befogók hossza tehát 40 cm és 42 cm.

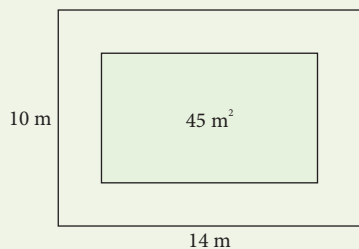
Ellenőrzés: $40^2 + 42^2 = 1600 + 1764 = 3364 = 58^2$. A Pitagorasz-tétel megfordítása miatt tehát ez valóban egy derékszögű háromszög.

FELADAT

1. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 10 cm-rel hosszabb, mint a másik befogó kétszerese, az átfogó pedig 4 cm-rel hosszabb a kisebbik befogó háromszorosánál. Mekkora az átfogó?

2. Egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága 48 mm hosszú, és az átfogót két olyan szakaszra osztja, amelyek hosszának különbsége 28 mm. Mekkora a derékszögű háromszög oldalai? (Használd a magasságtételt!)

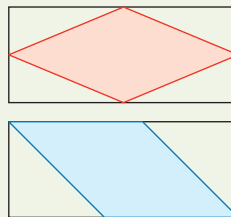
3. Egy $10 \text{ m} \times 14 \text{ m}$ méretű téglalap alakú udvar közepén 45 m^2 területű virágágyást készítenek úgy, hogy körben egyenlő szélességű sétány maradjon. Milyen széles lesz ez a sétány?



4. Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek

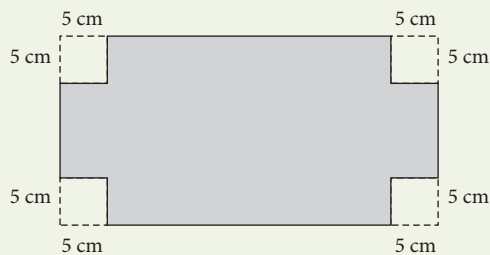
- a) 65 átlója van,
- b) 5150 átlója van,
- c) 15-ször annyi átlója van, mint ahány oldala?

5. Adott két egybevágó téglalap, oldalaiuk hossza 24 cm és 10 cm. A két téglalap mindegyikéből egy-egy rombuszt vágunk ki. Az egyik rombusz átlói a téglalap oldalaival egyenlő hosszúságúak, a másik téglalapból kivágott rombusz egyik átlója a téglalap egyik átlójával esik egybe, a másik átlója pedig a lehető legnagyobb.



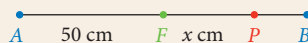
- a) Számítsd ki a rombuszok oldalának hosszát!
- b) Melyik rombusz területe a nagyobb?

- 6** Egy téglalap alakú bádoglemezből felül nyitott dobozt készítünk úgy, hogy a lemez sarkainál 5 cm oldalú négyzeteket kivágunk, és az így kapott széleket felhajtjuk. Milyen méretű a bádoglemez, ha hosszúsága kétszerese a szélességének, a belőle készített doboz térfogata pedig 1500 cm^3 ?



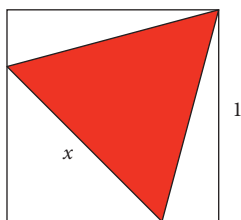
HÁZI FELADAT

- 1** Egy szabályos sokszögben összesen 44 átló húzható. Hány oldalú a sokszög, és mekkora egy belső szöge?
- 2** Egy derékszögű háromszög egyik befogója 55 cm hosszú, az átfogója pedig 23 cm-rel rövidebb a másik befogó kétszeresénél. Mekkora az átfogó és a másik befogó hossza?
- 3** Egy téglalap egyik oldala 14 cm-rel rövidebb, mint a másik. A téglalap területe 240 cm^2 .
- a)** Mekkora a téglalap kerülete?
- b)** Mekkora a téglalap köré írt kör kerülete és területe?
- 4** A 100 cm hosszú AB szakasz felezőpontja F . Az F ponttól mekkora távolságra vegyük fel az FB szakaszon a P pontot úgy, hogy az $AF : FP = FP : PB$ egyenlőség teljesüljön (azaz az FP szakasz hossza az AF és a PB szakasz hosszának mértani közepe legyen)?



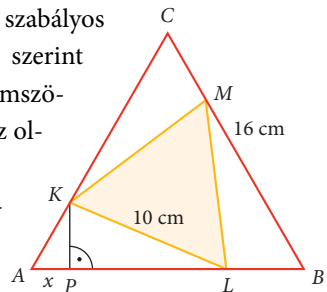
RÁADÁS

- 1.** Egy 1 dm-es oldalú négyzetbe szabályos háromszöget írunk az ábra szerint. Ezt a háromszöget pirosra színezzük.



- a)** Mekkora a piros háromszög oldalai?
- b)** Mekkora a piros háromszög területe?
- c)** Mekkora a négyzet többi részének a területe?

- 2.** Egy 16 cm-es oldalú szabályos háromszögbe az ábra szerint olyan szabályos háromszöget írunk, amelynek az oldalai 10 cm-esek.



- a)** Mekkora a levágott kis háromszögek (AKL , BLM , CMK) oldalai?
- b)** Derékszögűek-e a levágott háromszögek?
- c)** Mekkora a nagy háromszög részeinek a területe?

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Egy számnak és a reciprokának az összege 6,41. Melyik ez a szám?

Megoldás

Legyen a keresett szám az x . Nyilván $x \neq 0$, mert a 0-nak nincsen reciproka.

A szöveg szerint: $x + \frac{1}{x} = 6,41$. Mindkét oldalt x -szel

megszorozva: $x^2 + 1 = 6,41x$, $x^2 - 6,41x + 1 = 0$.

A megoldóképlet szerint:

$$x_{1,2} = \frac{6,41 \pm \sqrt{6,41^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{6,41 \pm 6,09}{2}.$$

Ebből

$$x_1 = \frac{6,41 + 6,09}{2} = 6,25, \quad x_2 = \frac{6,41 - 6,09}{2} = 0,16.$$

A keresett szám a $6,25 = \frac{25}{4}$, vagy a $0,16 = \frac{4}{25}$.

Mivel $6,25 + 0,16 = 6,41$, ezért mindkét szám megoldása a feladatnak.

2. Egy IC vonat 96 km-en keresztül teljes sebességgel ment, de a következő 68 km-en a pálya rosszabb minősége miatt csak $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val csökkentett sebességgel haladhatott. Mekkora az IC vonat teljes sebessége, ha a 164 km-es távolságot 1,5 óra alatt tette meg?

Megoldás

A vonat teljes sebessége legyen $x \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a csökkentett sebesség ekkor $(x - 15) \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

A 96 km megtételéhez szükséges idő $\frac{96}{x}$ óra, a 68 km-hez pedig $\frac{68}{x - 15}$ óra kell.

A szöveg szerint tehát: $\frac{96}{x} + \frac{68}{x - 15} = 1,5$. Világos, hogy csak $x > 15$ jöhet szóba.

Az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg

$x(x - 15)$ -tel:

$$96(x - 15) + 68x = 1,5x(x - 15).$$

A zárójelek felbontása után: $164x - 1440 = 1,5x^2 - 22,5x$.

Másodfokú egyenletet kaptunk, ezt átalakítjuk a megoldóképlet alkalmazásához megfelelő alakba:

$$1,5x^2 - 186,5x + 1440 = 0.$$

A megoldóképlet szerint:

$$x_{1,2} = \frac{186,5 \pm \sqrt{186,5^2 - 4 \cdot 1,5 \cdot 1440}}{3} \approx \frac{186,5 \pm 161,7}{3}.$$

Ebből

$$x_1 \approx \frac{186,5 + 161,7}{3} \approx 116, \quad x_2 \approx \frac{186,5 - 161,7}{3} \approx 8.$$

Ez utóbbi nem lehet megoldása a feladatnak, mert kisebb 15-nél, tehát az IC vonat teljes sebessége közelítőleg $116 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt.

Ellenőrzés

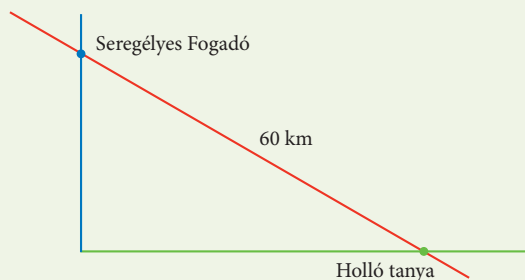
A 96 km-es út $\frac{96}{116} \approx 0,83$ órát vett igénybe, a 68 km-es

út pedig $\frac{68}{101} \approx 0,67$ órát. A két időtartam összege valóban 1,5 óra.

FELADAT

1. Egy biciklitúrán Tibor késve indul a többiek után. Nem aggódik, mert jó kondiban van és a bicikljé is gyors. Úgy számol, hogy egyedül óránként 6 km-rel tud többet megtenni, mint a csapat. Tibor 2 órán át tekert a zöld jelzésű úton, ekkor ért a Holló tanyához. Innen felhívta barátait, merre menjen tovább.

Ők is 2 órát bicikliztek, és nemrég érkeztek szállásukra, a Seregélyes Fogadóhoz. Kiderült, hogy Tibor rossz úton indult. Nem a zöld, hanem a rá merőleges kék úton kellett volna mennie. Éppen 60 km-re van a többiektől. Szerencsére van egy közvetlen, egyenes út a célig. Mennyi ideig tart Tibornak, míg eljut a Seregélyes Fogadóba, ha ugyanezzel a sebességgel teker tovább?



2. Egy szám 4,8-del kisebb a reciprokánál. Melyik ez a szám?
3. Egy tört nevezője 3-mal kisebb a számlálójánál, és a tört 2,1-del nagyobb a reciprokánál. Melyik ez a tört, ha a számlálója és a nevezője is egész szám?
4. Tisza-túrán összesen 8 óra alatt sikerült túrakenuval Tivadartól Gergelyugornyáig eljutni és onnan visszatérni. A két táborhely távolsága 21 km, a Tisza sebességét $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -nak vehetjük. Mekkora len-

ne a túrakenu sebessége állóvízben? (Feltehetjük, hogy mindvégig ugyanolyan tempóban evezünk.)

5. Egy traktor hátsó kerekének a kerülete kétszer akkora, mint az elsőé. Ha az első kerék kerülete 0,5 méterrel nagyobb volna, a hátsó kerék kerülete pedig 0,5 méterrel kisebb, akkor 150 m-es távon az első kerék 15-tel többet fordulna, mint a hátsó. Mekkora az első, illetve a hátsó kerék kerülete?



HÁZI FELADAT

1. Egy kikötőből egyszerre indul két hajó: az egyik északnak, a másik keletnek. Két óra múlva 58 km-nyire lesznek egymástól. Állapítsd meg mindkét hajó sebességét, ha az egyik óránként 1 km-rel többet tett meg, mint a másik!
2. Egy tört nevezője 1-gyel nagyobb a tört számlálójánál. A tört reciproka 0,45-del nagyobb, mint a

tört. Melyik törtről van szó, ha a tört számlálója és nevezője is egész szám?

3. Hétvégi rokonlátogatás alkalmával a 150 km-es távolságot odafelé $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val kisebb átlagsebességgel tettük meg, mint hazafelé. Így a hazafelé vezető út fél órával rövidebb ideig tartott, mint az odafelé vezető. Mekkora volt az átlagsebesség odafelé és visszafelé?

RÁADÁS

Egy kikötőből egyszerre indul két hajó, az egyik nyugatnak, a másik északkeletnek. Az északkelet felé haladó hajó sebessége másfélszer akkora, mint a másik hajó sebessége. Két és fél óra elteltével a két hajó egymástól 120 km-re található. Mekkora az egyes hajók sebessége?



41 SZÖVEGES FELADATOK

KIDOLGOZOTT FELADAT

A cukrászdába meghozták az édes és a sós teasüteményt, 2 kg-mal több édeset, mint sósat. Andi, a cukrászkisasszony aláírta az átvételi elismervényt. Kifizetett az édes süteményért 42 000 Ft-ot, a sós süteményért 27 000 Ft-ot.

– Tegyék csak le az ajtó elé, majd én behozom! – mondta a szállítóknak.

– Nem magának való ez – mondta az udvariasabbik szállító –, majd én beviszem. Hiszen ez több mint 30 kiló! Így is történt, a szállító becipelte a két nagy csomagot.

Andi tudta, hogy az édes sütemény kilója 600 forinttal kerül többbe, mint a sósé, de hogy melyik hány forint, azt nem mondta meg a főnöknője. Nekiállt kiszámolni (a sok nulla csak zavaró lett volna, ezért ezer forintos egységeket használt). Először is egy táblázatot készített:

	Teljes ár (ezer Ft)	1 kg ára (ezer Ft)	Hány kg-ot szállítottak?
édes	42	$x + 0,6$	$\frac{42}{x + 0,6}$
sós	27	x	$\frac{27}{x}$

Andi azért vette alapul a sós sütemény egységárát, hogy összeadással és ne kivonással írhasssa fel a másikat. (A negatív számokkal Andi sokszor hibázott.)

Felírta, hogy $\frac{42}{x + 0,6} > \frac{27}{x}$ (mégpedig 2-vel nagyobb),

amiből ilyen egyenletet kapott: $\frac{42}{x + 0,6} = \frac{27}{x} + 2$.

Ezt az egyenletet Andi a mérlegelvével oldotta meg.

Először megszorozta az egyenlet mindkét oldalát $(x + 0,6)$ -del is és x -szel is, azután addig alakíttgatta az egyenletet, amíg alkalmas lett a megoldóképlet használatára:

$$42x = 27(x + 0,6) + 2x(x + 0,6)$$

$$42x = 27x + 16,2 + 2x^2 + 1,2x$$

$$2x^2 - 13,8x + 16,2 = 0$$

$$x^2 - 6,9x + 8,1 = 0$$

A megoldóképlet szerint:

$$x_{1,2} = \frac{6,9 \pm \sqrt{6,9^2 - 4 \cdot 8,1}}{2} = \frac{6,9 \pm \sqrt{15,21}}{2} = \frac{6,9 \pm 3,9}{2};$$

$$x_1 = \frac{6,9 + 3,9}{2} = 5,4; \quad x_2 = \frac{6,9 - 3,9}{2} = 1,5.$$

– Hát most akkor mennyibe kerül egy kiló sós sütemény? 5400 forintba vagy 1500 forintba? – törte a fejét Andi. Végiggondolta:

– Ha a sós sütemény ára 5400 Ft/kg, akkor az édesé 600 Ft-tal több, vagyis 6000 Ft/kg. Ezt Andi nagyon soknak találta, de azért tovább számolt:

a 42 000 forintból akkor $42\ 000 : 6000 = 7$ kilogramm édes süteményre telik,

a 27 000 Ft-ból pedig $27\ 000 : 5400 = 5$ kilogramm sósra. Ez összesen 12 kg lenne, ami nem lehet, mert hiszen 30 kg-nál is több volt az áru, amit hoztak.

– Ha a sós sütemény ára 1500 Ft/kg, akkor az édesé 600 Ft-tal több, vagyis 2100 Ft/kg. Andi látta, hogy ez már reális ár. Így folytatta a számolást:

a 42 000 forintból akkor $42\ 000 : 2100 = 20$ kilogramm édes süteményre telik,

a 27 000 Ft-ból pedig $27\ 000 : 1500 = 18$ kilogramm sósra.

Ez összesen 38 kg, tehát tényleg több 30 kg-nál.

Szerencse, hogy közben nem jöttek vevők, így Andi mindent tisztázott magában.



FELADAT

1. Egy leánykórus új kendőket vásárol a fellépőruhához. Pályáztak 300 000 Ft-ra, ebből vennének kendőt minden kórustagnak, és 10 darabot még tartalékba. Ennyit nem nyertek, csak 180 000 Ft-ot. Ezért lemondtak a tartalék kendőkről, az eredeti árból pedig sikerült darabonként 1000 forintot lealkudniuk. Így elég lesz a 180 ezer forint. Hányan vannak a kórusban?

- a) Töltsd ki a következő táblázat üres helyeit a füzetedben!

	A kendők száma	Elkölthető összeg (ezer Ft)	Egy kendőre jutó összeg (ezer Ft)
Az eredeti terv szerint		300	
A valóság- ban	x	180	

- b) Írd fel, hogy az utolsó oszlopba írt számok egyike nagyobb a másiknál: $\dots > \dots$ (ezer forinttal)!
- c) Add hozzá a kisebbik számhoz az 1 ezer forintot! Írd fel, hogy ez az összeg egyenlő a nagyobb számmal!
- d) Oldd meg a kapott törtes egyenletet! A megoldáshoz használd a mérlegelvet!

- e) Két gyököt kapsz. Ellenőrizd mindkét gyökre vonatkozóan:
- lehetséges-e, hogy a kórusnak ennyi tagja van;
 - melyik esetben mennyire sikerült lealkudni a kendők egységárát!
- f) A kendőket árusító boltból telefonálnak, hogy a boltban sok fogyott a kendőkből, már csak 62 darab van raktáron. Azt kérdezik, rendelkeznek-e még az énekkar vásárlása előtt. Hány tagú a kórus, ha „igen”-nel válaszolnak, és hány tagú, ha „nem”-mel?

2. Érettségi találkozón mindenki mindenkinek adott egy fényképet. Összesen 342 fénykép cserélt gazdát. Hányan voltak jelen a találkozón?
3. Egy szabályos sokszög egy belső szöge 12° -kal kisebb, mint az 5-tel több oldalú szabályos sokszög egy belső szöge. Hány oldalúak ezek a szabályos sokszögek?
4. Ha 55 csavart veszünk, akkor a fizetendő összeg forintban kifejezve 600-zal több, mint ahány csavart vehettünk volna 720 forintért. Hány forintba kerül egy csavar?

HÁZI FELADAT

1. Egy kertben gyümölcsfák állnak. Minden gyümölcsfán annyi seregély lakmározik, amennyi a gyümölcsfák száma. A lakmározó seregélyek száma éppen 75-tel nagyobb, mint a gyümölcsfák számának tízszerese. Hány fa áll a kertben?
2. Egy konvex sokszögnek 4-gyel több oldala és 2,7-szer annyi átlója van, mint egy másiknak. Melyik hány oldalú?

3. Téltre krumplit vásárol egy család. 2400 forintért már majdnem meg is vettek egy zsák krumplit, amikor meglátták, hogy a szomszédos pultnál 20 forinttal olcsóbb a krumpli kilója. Így aztán ott vásárolták meg 2400 forintért a téltre valót; 4 kg-mal többet, mintha a drágább krumplit vették volna meg. Hány kg krumplit vásároltak?



KIDOLGOZOTT FELADAT

1. A Pallasz Fordítóiroda megbízást kap egy lexikon magyarra fordítására. A fordítást egy ember 60 nap alatt végezné el, de a munkát – egyenlő részekre osztva – többen is végezhetik egyszerre. A megbízó először kiválasztja a fordítókat, majd szerződést köt velük. A megbízás annyi napra szól, ahány nap alatt együtt elvégzik a munkát. A fordítók az egy nap alatt lefordított anyagot továbbküldik a lektornak is, akit ugyanannyi napra szerződtetnek, mint a fordítókat. A fordítók és a lektor napidíja egységesen 4000 Ft, ezenkívül a fordítók egyszeri, 40 000 Ft juttatást is kapnak.

a) Mennyi költsége lesz a fordítóirodának, ha 1, 2, 5, x fő fordítót és egy lektort alkalmaz?

b) A vezérigazgató végül 440 000 Ft kifizetését engedélyezi a fordítóknak és a lektornak. Vajon hány fordítót alkalmazott a fordítóiroda?

Megoldás

a) Készítsünk táblázatot a költségek áttekintésére! Az összegeket ezer forintban adjuk meg. Töltsd ki a táblázat üres mezőit! A füzetedben dolgozz!

Fordítók száma	Fizetett napok száma	Fordítók napidíja összesen (ezer Ft)	Lektor napidíja összesen (ezer Ft)	Egyszeri juttatás (ezer Ft)	Összes költség (ezer Ft)
1	60	$1 \cdot 60 \cdot 4 = 240$	$60 \cdot 4 = 240$	40	520
2	30	$2 \cdot 30 \cdot 4 = 240$	$30 \cdot 4 = 120$	$2 \cdot 40 = 80$	440
5	12				
x	$\frac{60}{x}$				



A számoláshoz táblázatkezelő program is használható.

b) Az a) részben már kiszámoltuk, hogy 2 fordító alkalmazása esetén is ennyi a költség, de vajon ez az egyetlen ilyen eset? Írjunk fel egyenletet a problémára: $240 + \frac{240}{x} + 40x = 440$.

Mindkét oldalt 40-nel osztva: $6 + \frac{6}{x} + x = 11$, mindkét oldalból 6-ot kivonva: $\frac{6}{x} + x = 5$.

Szorozzuk be mindkét oldalt x -szel: $6 + x^2 = 5x$, ezt 0-ra rendezve: $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Az egyenletet megoldva: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ adódik.

Igaz tehát, hogy 2 fordító esetén 440 000 Ft-ot fizet a fordítóiroda, de 3 fordító esetén is pontosan ennyi lesz a költség! A fordítóiroda tehát alkalmazhatott 3 fordítót is (így több embernek munkát adva), a költségeit ez nem befolyásolta.

2. Andi és Tomi jelentkezett a fordítóiroda ajánlatára, mondván, hogy ők ketten 30 nap alatt le tudják fordítani az egész lexikont. Andi gyorsabban halad a fordítással, mert jobban ismeri a szakszavakat. Ezért ő egyedül 25 nappal hamarabb le tudná fordítani az egész lexikont, mint amennyi idő Tominak egyedül dolgozva szükséges hozzá. Hány nap alatt tudná Andi egyedül is lefordítani az egész lexikont?

Megoldás

Ha Andinak a teljes lexikon lefordításához x nap szükséges, akkor Tominak ehhez $(x + 25)$ napra van szüksége. Készítsünk táblázatot a jobb áttekinthetőség érdekében!

	Andi	Tomi
Egyedül az egészet ennyi nap alatt fordítja le	x	$x + 25$
Egy nap alatt egyedül ekkora részt fordít le a lexikonból	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x + 25}$
30 nap alatt egyedül ekkora részt fordít le a lexikonból	$\frac{30}{x}$	$\frac{30}{x + 25}$

Mivel 30 nap alatt együtt az egész lexikon lefordításával végeznek, ezért $\frac{30}{x} + \frac{30}{x + 25} = 1$.

Világos, hogy x csak pozitív lehet. Megszorozzuk az egyenlet mindkét oldalát $x(x + 25)$ -tel:

$$30(x + 25) + 30x = x(x + 25).$$

$$30x + 750 + 30x = x^2 + 25x, \quad \text{ezt nullára rendezve:}$$

$$0 = x^2 - 35x - 750.$$

Megoldóképlettel:

$$x_{1,2} = \frac{35 \pm \sqrt{1225 + 3000}}{2} = \frac{35 \pm 65}{2}.$$

$$\text{Ebből } x_1 = 50, \quad x_2 = -15.$$

Ez utóbbi nem megoldása a feladatnak.

Andi 50 nap alatt, Tomi 75 nap alatt fordítaná le egyedül az egész lexikont.

Ellenőrzés

Andi naponta a lexikon $\frac{1}{50}$ részét fordítja le, tehát 30 nap

alatt a lexikon $\frac{30}{50} = \frac{3}{5}$ részével végezne. Tomi naponta a

lexikon $\frac{1}{75}$ részét fordítja le, tehát 30 nap alatt a lexikon

$\frac{30}{75} = \frac{2}{5}$ részével végezne. Ketten együtt tehát lefordítják

a lexikon $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5}$ részét, vagyis tényleg elkészülnének a munkával.

FELADAT

1. 📢 Nagypapa kertjét fel kell ásni. Miklós egyedül dolgozva 10 órával hamarabb felássa a kertet, mint Bence egyedül. Ha mindketten nekilátnak, akkor 12 óra alatt felássák a kertet. Mennyi idő alatt ásná fel egyedül Bence az egész kertet?



2. 📢 A Pallasz Fordítóiroda egy hosszabb könyv magyar nyelvre lefordított kéziratát három gépirónak

adta oda gépelésre. A leggyorsabb gépiró feleannyi idő alatt is legépelné az egész anyagot, mint a leglassúbb. A harmadik gépiró 100 órával több idő alatt végezne egyedül az egész munkával, mint a leggyorsabb. Ha hárman együtt dolgoznak, akkor elvileg 67,2 óra alatt lesznek készen a kézirat legépelésével.

- Mennyi idő alatt gépelné le egyedül a leggyorsabb gépiró az egész anyagot?
- A kézirat hány százalékát gépelnék le az egyes gépirók a 67,2 óráig tartó közös munka alatt?
- Mennyi idő alatt lenne kész a kézirat gépelése, ha a munkát három egyenlő részre osztanák, és a kész szöveget csak akkor adnák le, amikor már mindegyikük végzett a saját adagjával?

3. 📢 Egy ember változó kamatozású értékpapírba fektet be 300 000 Ft-ot. A második évben a kamatláb 2-vel kisebb, mint az első évben.

- Mekkora összeg lesz a számlán a második év végére, ha az első évben a kamatláb 6%, a második évben 4%?
- Mekkora volt a kamatláb, ha a második év végére 356 400 Ft lesz a számlán?

4. Két hónapos lekötési akciót indít egy pénzintézet. Az elhelyezett betét után az első hónapban fizetett kamatot hozzáírja a betéthez, majd a második hónapban a megnövelt összeg után fizetett kamatot 0,5 százalékponttal megemeli (ez a szakkifejezés azt jelenti, hogy ha az első hónapban a kamat $p\%$ -os volt, akkor a második hónapban $(p + 0,5)\%$ lesz).

- a) Hány százalékos az első havi kamat, ha 200 000 Ft elhelyezett betét esetén két hónap múlva 207 060 forint járna?
- b) A kamat után 20% forrásadót kell fizetni. Végül hány százalékkal magasabb a kifizetett összeg, mint az elhelyezett betét?

5. Egy tv-készülék árát először felemelték $p\%$ -kal, majd ugyanennyi százalékkal csökkentették az új árát. Melyik kijelentés igaz és melyik hamis? Válaszodat indokold!

- a) A második árváltozás után ugyanennyi lett a tv ára, mint eredetileg volt.
- b) A második árváltoztatás után olcsóbb lett a tv, mint eredetileg volt.
- c) A második árváltoztatás után drágább lett a tv, mint eredetileg volt.
- d) A második árváltoztatás után $\frac{p^2}{100}\%$ -kal olcsóbb lett a tv, mint eredetileg volt.
- e) Ugyanannyi lett a tv ára, mint ha először $p\%$ -os árcsökkentés, majd ugyanennyi százalékos ár-emelés lett volna.

HÁZI FELADAT

1. Az 1. kidolgozott feladatban a 440 ezer forintos költség 2 vagy 3 fordító és egy lektor alkalmazásával is elérhető.

- a) Mondj érvet amellet, hogy két fordítót alkalmazzon az iroda, és amellet is, hogy 3 fordítót!
- b) Ha te volnál az egyik fordító, akkor mennyi pénzt kapnál abban az esetben, ha rajtad kívül még egy, illetve ha még két fordítóval kötne szerződést a fordítóiroda? Érvelj amellet, hogy melyik esetet tartod előnyösnek! Gondolj arra is, hogy nem biztos az, hogy minden napra jut fordítási munkád, illetve arra is, hogy más fordítócég esetleg más feltételekkel kötne szerződést veled.

2. Két automata egyforma csavarokat gyárt. A korszerűbb gép 5 órával rövidebb idő alatt gyártaná le



egyedül a 100 000 darabot, mint ha egyedül csak az elavultabb gép üzemelne. Ha mindkét gépet egyszerre üzemeltetik, akkor óránként 9000 csavart készítenek el együtt.

- a) Mennyi idő alatt gyártaná le a 100 000 darab csavart egyedül az elavultabb gép?
- b) Mennyi idő alatt készül el a 100 000 csavar, ha a két gép egyszerre üzemel?

3. Egy divatjamúlt kabát ára 36 000 Ft, de ezen az áron a múlt hónapban egyetlen darab sem fogyott. Ezért az üzletvezető leértékeli a kabátot, de az új áron sem kelendő. Végül az új árát kétszer akkora százalékkal csökkenti, mint az előző árcsökkentésnél. Az így kialakított 13 500 forintos áron végre a teljes készletet sikerül eladnia. Hány százalékos volt az első árcsökkentés?



Az 1. kidolgozott feladatban a fordítóiroda 440 000 Ft-ot fizetett a lexikon lefordításáért. A megadott feltételek mellett lehetett volna kevesebb is a fordítás költsége?

Láttuk, hogy ha x fő fordítót alkalmaz az iroda, akkor a költség $240 + \frac{240}{x} + 40x$ ezer forint. A 240 ezer forint fix költség (a fordítási munka 60 napra tervezett napidíjainak összege). A költség csökkentése tehát azon múlik, hogy sikerül-e a $\frac{240}{x} + 40x$ összeget minél kisebbre megválasztani.

Két pozitív szám esetén alkalmazhatjuk a számtani és mértani közepükről tanultakat:

$$\frac{\frac{240}{x} + 40x}{2} \geq \sqrt{\frac{240}{x} \cdot 40x}, \text{ amiből}$$

$$\frac{\frac{240}{x} + 40x}{2} \geq \sqrt{240 \cdot 40}, \text{ vagyis}$$

$$\frac{240}{x} + 40x \geq 2 \cdot \sqrt{9600}.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\frac{240}{x} + 40x$ összeg semmiképpen nem lehet kisebb, mint $2 \cdot \sqrt{9600} \approx 196$.

A fordítóiroda költsége tehát nem lehet kisebb, mint közelítőleg $240 + 196 = 436$ ezer forint.

Elérhető-e ez a legkisebb összeg?

A tanultak szerint két pozitív szám számtani és mértani közepe csak akkor lehet egyenlő, ha két egyenlő számról van szó. Ezek szerint a 436 ezer forintos költség csak akkor érhető el, ha $\frac{240}{x} = 40x$, azaz $x^2 = 6$.

Mivel x a fordítók száma, ezért x^2 nem lehet 6. **A 436 ezer forintos elméleti minimum tehát nem érhető el.**

Nyitva maradt még az a kérdés, hogy lehet-e 440 ezer forintnál kevesebb a költség.

A megoldáshoz mellékelt táblázatban már láttuk, hogy 1, illetve 5 fordító esetén nagyobb lenne a költség. Ha a fordítók száma 6 vagy több, akkor már az egyszeri juttatásokért is legalább $6 \cdot 40 = 240$ ezer forintot kellene fizetni, és ehhez jön még a fordítók napidíjának fix 240 ezer forintos költsége. E két költségelem is már 480 ezer forintot tesz ki, pedig a lektor díját még nem is számoltuk hozzá.

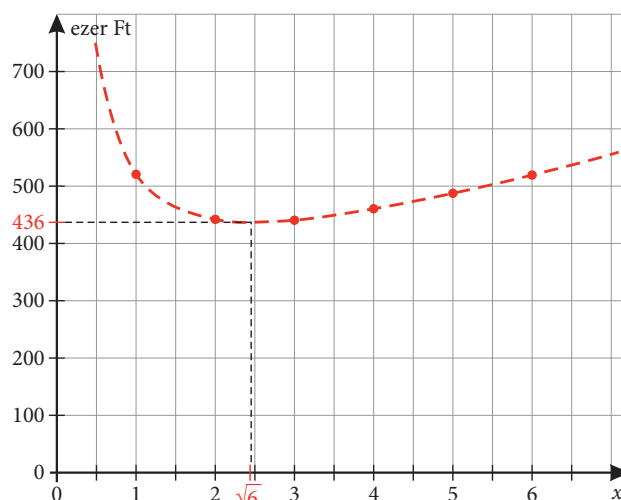
Már csak azt az esetet kell megvizsgálni, amelyben 4 fordítót alkalmaz a cég. Ekkor 15 napig tartana a munka. 240 ezer forint a fordítók napidíja, $15 \cdot 4 = 60$ ezer forint a lektor összes díja és $4 \cdot 40 = 160$ ezer forint a fordítók egy-



szeri juttatása. Összesen tehát $240 + 60 + 160 = 460$ ezer forint lenne a költség.

Ez több, mint a 440 ezer forint, tehát **az adott feltételek mellett a 440 ezer forint a legkisebb költség.**

A költségek alakulását grafikonon is szemléltethetjük.



KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Hasonlítsuk össze az egyenleteket! Ugyanazok-e a megoldásaik?

a) $x^2 = 4$; $x^2 - 4 = 0$; $|x| = 2$

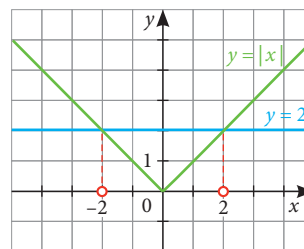
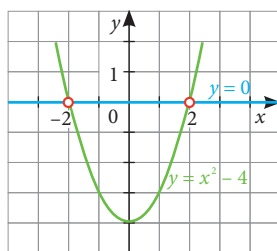
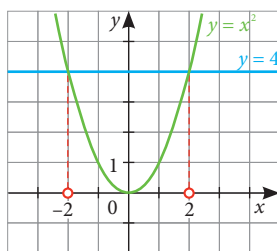
b) $x + 3 = 7$ és $(x + 3)^2 = 49$

Megoldás:

a) $x^2 = 4$; $x^2 - 4 = 0$; $|x| = 2$

Mindegyik egyenletnek két gyöke van: a 2 és a -2.

Ábrázoltuk grafikonon is az egyenleteket:



Az egyenletek gyökei megegyeznek. Azt mondjuk erre, hogy ezek az egyenletek ekvivalensek egymással.

b) $x + 3 = 7$ és $(x + 3)^2 = 49$

Az első egyenlet megoldása $x = 4$. Ez természetesen megoldása a második egyenletnek is, de annak van egy másik megoldása is!

$$(x + 3)^2 = 49 \Rightarrow x + 3 = 7 \text{ vagy } x + 3 = -7.$$

$$\text{Ebből: } x = 4 \text{ vagy } x = -10.$$

Ez a két egyenlet nem ekvivalens egymással.

FELADAT

1. Ekvivalens-e az $\mathbb{R}$ alaphalmazon

a) a $3(2 - x) + 7 = \frac{5x + 13}{4}$ egyenlet és a $12(2 - x) + 28 = 5x + 13$ egyenlet;

b) az $(x + 8)^2 = (4 - 3x)^2$ egyenlet és az $x + 8 = 4 - 3x$ egyenlet;

c) a $\sqrt{x} = 2 - x$ egyenlet és az $x = (2 - x)^2$ egyenlet?

ELMÉLET

Ha két egyenletnek egy alaphalmazon ugyanaz a megoldáshalmaza, akkor ezeket az egyenleteket **ekvivalenseknek** mondjuk. Az ekvivalens szó latin eredetű, magyarul egyenértékűt jelent.

Figyelnünk kell az egyenletek rendezése közben:

- Ha négyzetre emeljük egy egyenlet mindkét oldalát, akkor lehetséges, hogy az új egyenletnek már több gyöke van, szaporíthatjuk a gyökök számát.
Behelyettesítéssel ellenőrizni kell, hogy a kapott gyökök megoldásai-e az eredeti egyenletnek.
- Ha az $(f(x))^2 = (g(x))^2$ egyenlet helyett az $f(x) = g(x)$ egyenletet vizsgáljuk, akkor lehetséges, hogy az új egyenletnek kevesebb gyöke van, mint az eredetinek, és nem találjuk meg így a feladat összes megoldását.

KIDOLGOZOTT FELADAT

- 2.** Bence és a barátja, Dönci nekiállt, hogy megoldja az $\frac{x^2 - 10x + 16}{x - 2} = 2x + 1$ egyenletet. Melyikük ügyesebb?

Megoldás

Bence így okoskodott: az $x - 2$ nevezőben szerepel, ezért az x nem lehet 2, de bármely más valós szám igen. Ezután megszorozta az egyenlet mindkét oldalán álló kifejezést $(x - 2)$ -vel, elvégezte a kijelölt szorzást, és alkalmazta a mérleget:

$$\frac{x^2 - 10x + 16}{x - 2} = 2x + 1,$$

$$x^2 - 10x + 16 = (2x + 1)(x - 2);$$

$$x^2 - 10x + 16 = 2x^2 + x - 4x - 2;$$

$$x^2 + 7x - 18 = 0.$$

A megoldóképlet szerint

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 18}}{2} = \frac{-7 \pm 11}{2}, \text{ vagyis}$$

$$x_1 = 2 \text{ és } x_2 = -9.$$

Azt már megfigyelte, hogy a 2 nem jöhet szóba (mert akkor a tört nevezője 0 lenne), tehát csak a (-9) lehet az egyenlet gyöke. Behelyettesítéssel megvizsgálta, hogy -9 valóban megoldás.

Bence észrevette, hogy 2 nem megoldása a feladatnak. De azt is megfigyelte, hogy a 2-vel csak az eredeti egyenlet esetében „van baj”, az $(x - 2)$ -vel való szorzás után kapott egyenleteknek ez is gyöke.

Dönci gyöktényezőss alakban írta fel a tört számlálóját.

$$x^2 - 10x + 16 = (x - 2)(x - 8).$$

Ezért így dolgozott:

$$\frac{x^2 - 10x + 16}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x - 8)}{x - 2} = x - 8,$$

vagyis az $\frac{x^2 - 10x + 16}{x - 2} = 2x + 1$ egyenlet helyett veheti

a sokkal egyszerűbbet, az $x - 8 = 2x + 1$ egyenletet. Ezt a mérlegetvel oldotta meg:

$$x - 8 = 2x + 1;$$

$$x = -9.$$

Behelyettesítéssel ellenőrizte, hogy a (-9) az eredeti egyenletnek is gyöke.

FELADAT

- 2.** Ekvivalens-e az $\mathbf{R}$ alaphalmazon

a) az $\frac{x^2 + 2x}{x} = 2$ egyenlet és az $x^2 + 2x = 2x$ egyenlet;

b) az $5x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ egyenlet és az $5x = 0$ egyenlet;

c) az $\frac{(x - 3)(x + 5)}{(x + 2)(x + 5)} = -\frac{2}{3}$ egyenlet és a $3(x - 3) = -2(x + 2)$ egyenlet;

- 3.** Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\frac{x}{x + 4} + \frac{3}{x} = 1,1$ b) $\frac{5}{x - 5} + \frac{x + 2}{x + 5} = \frac{9}{5}$

- 4.** Oldd meg az egyenleteket! („Dönci módszerét” próbáld alkalmazni.)

a) $\frac{(x - 6)(x + 1)}{2x + 2} = 0$ b) $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 3x - 4} = 0,72$

HÁZI FELADAT

- 1.** Ekvivalens-e egymással az $\mathbf{R}$ alaphalmazon a következő két-két egyenlet?

a) $\sqrt{x^2 - 16} = 0$ és $x^2 - 16 = 0$

b) $\frac{3x}{x^2 + 4} = 0$ és $3x = 0$

- 2.** Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

a) $\frac{3x}{x - 3} - \frac{x + 3}{x} = \frac{11}{4}$

b) $\frac{10}{7 + x} + 1 = \frac{8}{7 - x}$

- 3.** Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán! Mindegyik esetben állapítsd meg, hogy a megoldás során kapott egyenletek ekvivalensek-e az eredeti egyenlettel!

a) $\frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} = 6$

b) $\frac{x + 5}{x^2 + 7x + 10} = 5x + 14$

KIDOLGOZOTT FELADAT

Oldjuk meg a $\sqrt{x} = x - 2$ egyenletet!

Megoldás:

I. Mi az egyenlet értelmezési tartománya?

A gyökjel alatt nem állhat negatív szám, ezért $x \geq 0$.

II. Oldjuk meg az egyenletet!

A megoldáshoz emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát!

$$x = (x - 2)^2$$

Bontsuk fel a zárójelet, és hozzuk olyan alakra az egyenletet, amelynél a megoldóképlet alkalmazható.

$$x = x^2 - 4x + 4.$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Megoldóképlettel: $x = 4$ vagy $x = 1$.

III. Behelyettesítéssel ellenőrizzük az eredményeket:

4-et behelyettesítve: $\sqrt{4} = 4 - 2$.

De 1-et behelyettesítve: $\sqrt{1} \neq 1 - 2$.

Az egyenletnek csak egy gyöke van: a 4.

FELADAT

1. 🎧 Oldd meg a $\sqrt{x+3} + 9 = 2x$ egyenletet!

- Állapítsd meg az egyenlet értelmezési tartományát!
- Rendezd át az egyenletet úgy, hogy ha négyzetre emeled az egyenlet két oldalán álló kifejezést, akkor ne maradjon benne négyzetgyök!
- Végezd el a négyzetre emelést!
- Oldd meg a keletkező másodfokú egyenletet!

Benne vannak-e a kapott gyökök az egyenlet értelmezési tartományában?

- A másodfokú egyenlet gyökei közül melyik gyöke az eredeti egyenletnek, és melyik nem?

2. 🎧 Oldd meg az egyenleteket!

a) $\sqrt{x} = 6 - x$

b) $\sqrt{2x} = 4 - x$

ELMÉLET

Ha A is és B is számot jelöl, és $A = B$, akkor biztos, hogy $A^2 = B^2$.

Ha azonban csak azt tudjuk, hogy $A^2 = B^2$, akkor nem biztos, hogy $A = B$, mert az is lehetséges, hogy $A = -B$.

Ezt az egyszerű gondolatsort használjuk fel a négyzetgyökös egyenletek megoldására.

Például

ha azt az x számot keressük, amelyre igaz, hogy $\sqrt{x-2} = 4-x$, akkor az a szám *biztosan* gyöke a négyzetre emelés után kapott

$$(\sqrt{x-2})^2 = (4-x)^2; \quad x-2 = 16-8x+x^2; \quad x^2-9x+18=0$$

egyenleteknek is (ha $A = B$, akkor biztos, hogy $A^2 = B^2$). De az már *nem biztos*, hogy az utolsó egyenlet mindegyik gyöke megoldása az eredetinek is.

Itt az utolsó egyenletnek két gyöke van, a 3 és a 6, és közülük csak a 3 gyöke az eredeti egyenletnek, a 6 nem.

Ugyanis behelyettesítéssel a következőket kapjuk:

- ha $x = 3$, akkor a $\sqrt{3 - 2} = 4 - 3$ állítás, mert azt mutatja, hogy $1 = 1$,
- ha $x = 6$, akkor a $\sqrt{6 - 2} = 4 - 6$ hamis állítás, mert azt mutatja, hogy $2 = -2$.

Azt mondjuk, hogy a $\sqrt{x - 2} = 4 - x$ egyenletnek **következményegyenlete** a belőle négyzetre emelés útján kapott $x - 2 = 16 - 8x + x^2$, és az ebből mérlegelvvel adódó $x^2 - 9x + 18 = 0$ egyenlet is.

A **következményegyenlet** gyökei között az eredeti egyenlet minden gyöke megtalálható.

Megfigyelések

- Az $x - 2 = 16 - 8x + x^2$ egyenletnek következményegyenlete a $x^2 - 9x + 18 = 0$, és ez fordítva is igaz: a második egyenletnek következményegyenlete az első (hiszen a két egyenlet gyökei azonosak). Ez a két egyenlet **ekvivalens az $\mathbf{R}$ alaphalmazon**.
- A $\sqrt{x - 2} = 4 - x$ egyenletnek következménye az $x - 2 = 16 - 8x + x^2$ egyenlet, de fordítva ez nem igaz: a második egyenletnek **nem** következményegyenlete az első [ugyanis az első egyenletnek csak a (-1) gyöke, míg a másodiknak a 7 és a (-1) is]. Ez a két egyenlet **nem ekvivalens az $\mathbf{R}$ alaphalmazon** (sem az első egyenlet értelmezési tartományán mint alaphalmazon).

FELADAT

- 3** Ebben a feladatban egy-egy négyzetgyökös egyenlet megoldásának részleteit láthatod. Először állapítsd meg az egyenlet értelmezési tartományát! Döntsd el a megoldásban szereplő egyenletek mindegyikéről, hogy – az $\mathbf{R}$ alaphalmazon – a megelőzőek közül melyik egyenletnek következménye, és melyeknek nem!

a) $\sqrt{x + 14} + x = 16$	b) $x = \sqrt{3x - 2} + 4$
$\sqrt{x + 14} = 16 - x$	$x - 4 = \sqrt{3x - 2}$
$x + 14 = (16 - x)^2$	$(x - 4)^2 = 3x - 2$
$x^2 - 33x + 242 = 0$	$x^2 - 11x + 18 = 0$

- 4** Oldd meg az egyenletet!

$$\sqrt{3 - 2x} - x = 6$$

- 5** *Bhászka* hindu tudós több mint 800 évvel ezelőtt írt egy könyvet a leánya számára, *Lilavati* (elbűvölő) címen, abból való ez a feladat:

Melyik az a szám, amely 3-mal szorozva, azután a szorzat háromnegyed részével növelve, 7-tel osztva, a harmadrészével csökkentve, önmagával szorozva és 52-vel csökkentve, azután belőle négyzetgyököt vonva, hozzáadva 8-at, és elosztva 10-zel, 2-t ad?

Jelöld a keresett számot egy betűvel, és írd fel, hogyan kapod ebből a 2-t! Ezután *lebontogatással* (lépésről lépésre visszafelé haladva) megkaphatod azt a bizonyos számot. Sőt: két számot is, a 28-at és a (-28) -at. Ha csak a 28-at találtad meg, akkor úgy jártál, mint annak idején maga *Bhászka*.



HÁZI FELADAT

1. A két egyenlet közül melyik következménye a másiknak? Vannak-e ekvivalensek az egyenletpárok között?

- a) $x^2 = 16$ és $x = -4$
 b) $\sqrt{x-1} = 5$ és $x-1 = 25$
 c) $3x-1 = 5$ és $(3x-1)^2 = 25$
 d) $\frac{4}{3x-6} = \frac{3}{5x-10}$ és $\frac{3x-6}{4} = \frac{5x-10}{3}$

2. Oldd meg grafikus módszerrel és algebrai úton is a következő egyenleteket!

- a) $\sqrt{x} = x$ c) $\sqrt{x} = 2x - 6$
 b) $\sqrt{x} = -x$ d) $\sqrt{x+1} = x-1$

3. Oldd meg az egyenleteket!

- a) $\sqrt{5x-9} = 3-x$
 b) $\sqrt{13-6x} = 5-3x$
 c) $\sqrt{5x} + 23 = x-7$
 d) $5\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = \sqrt{x} + 18$

EMELT SZINT

1. Hány megoldása (gyöke) lehet a $\sqrt{x+2} = A$ egyenletnek, ha az A valamilyen valós számot jelöl?

Megoldás

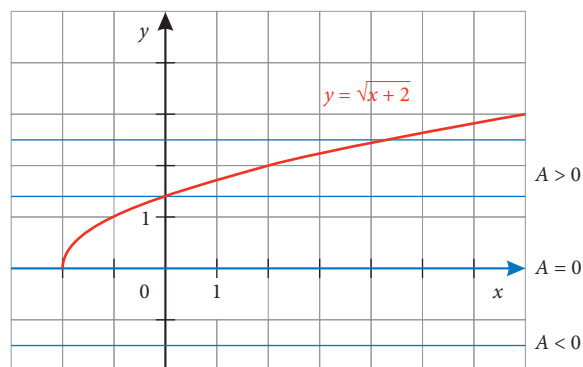
Ha $A < 0$, akkor nincs az egyenletnek gyöke, mert egy szám négyzetgyöke nem lehet negatív.

Ha $A = 0$, akkor $x+2 = 0$, s eszerint $x = -2$ (az egyenletnek 1 gyöke van).

Ha $A > 0$, akkor négyzetre emeljük az egyenlet két oldalán álló számot: $x+2 = A^2$; $x = A^2 - 2$ (az egyenletnek 1 gyöke van).

Tehát az A szám nagyságától függ, hogy az egyenletnek 0 vagy 1 gyöke van.

Ha megrajzoljuk az $y = \sqrt{x+2}$ egyenletű görbét, ami egy fél parabola, ugyanezt tapasztaljuk.



Használható a GeoGebra vagy a Graph program is.

2. Melyik valós számot jelölheti az x , ha

- a) $\sqrt{4x+8} = 2 + \sqrt{3x-2}$;
 b) $\sqrt{5-8x} = 4 - \sqrt{3x-4}$?

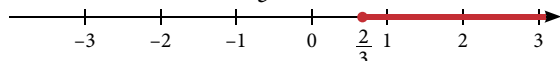
Megoldás

a) Először vizsgáljuk meg, mely valós számok esetén van értelmük a gyökök kifejezéseknél! A négyzetgyökök alatt nem lehet negatív szám, ezért kell, hogy $4x+8$ is és $3x-2$ is pozitív vagy 0 legyen.

– $A(4x+8)$ akkor és csakis akkor nemnegatív, ha $4x \geq -8$, vagyis $x \geq -2$.



– $A(3x-2)$ akkor és csakis akkor nemnegatív, ha $3x \geq 2$, vagyis $x \geq \frac{2}{3} \approx 0,67$.



Mindkét feltétel teljesül, ha $x \geq \frac{2}{3}$. Tehát ezek között a számok között keressük az egyenlet gyökeit.

Emeljük négyzetre az = jel két oldalán álló számot:

$$(\sqrt{4x+8})^2 = (2 + \sqrt{3x-2})^2,$$

$$4x+8 = 4 + 4\sqrt{3x-2} + 3x-2;$$

$$4\sqrt{3x-2} = x+6.$$

Úgy rendeztük az egyenletet, hogy ha most ismét négyzetre emelést végzünk, akkor már ne legyen az új egyenletben négyzetgyökök:

$$(4\sqrt{3x-2})^2 = (x+6)^2; 16(3x-2) = x^2 + 12x + 36;$$

$$48x - 32 = x^2 + 12x + 36; x^2 - 36x + 68 = 0.$$

Ha van gyöke az eredeti egyenletnek, akkor az gyöke a most kapott egyszerű egyenletnek is.

Az $x^2 - 36x + 68 = 0$ egyenletre alkalmazzuk a megoldóképletet:

$$x_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{36^2 - 4 \cdot 68}}{2} = \frac{36 \pm \sqrt{1024}}{2} = \frac{36 \pm 32}{2};$$

$$x_1 = 34; \quad x_2 = 2.$$

Mindkét szám nagyobb $\frac{2}{3}$ -nál, tehát szóba jöhet megoldásként. Behelyettesítve:

Ha $x = 34$, akkor a $\sqrt{4x+8} = 2 + \sqrt{3x-2}$ egyenletből a következőt kapjuk:

$$\sqrt{4 \cdot 34 + 8} = 2 + \sqrt{3 \cdot 34 - 2};$$

$$\sqrt{144} = 2 + \sqrt{100};$$

$$12 = 2 + 10, \text{ ami } \textbf{igaz} \text{ állítás.}$$

Ha pedig $x = 2$, akkor ez adódik:

$$\sqrt{4 \cdot 2 + 8} = 2 + \sqrt{3 \cdot 2 - 2};$$

$$\sqrt{16} = 2 + \sqrt{4};$$

$$4 = 2 + 2, \text{ ami szintén } \textbf{igaz} \text{ állítás.}$$

Tehát a $\sqrt{4x+8} = 2 + \sqrt{3x-2}$ egyenletben az x két számot is jelölhet, a 2-t is és a 34-et is.

Másképp

A valós számok halmazán mint alaphalmazon a $\sqrt{4x+8} = 2 + \sqrt{3x-2}$ egyenlet megoldáshalmaza: $\{2; 34\}$.

- b) Először vizsgáljuk meg, mely valós számok esetén van értelmük a gyökös kifejezéseknek! A négyzetgyökjel alatt nem lehet negatív szám, ezért kell, hogy $5 - 8x$ is és $3x - 4$ is pozitív vagy 0 legyen.

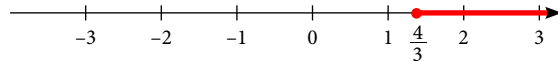
– Ha $5 - 8x \geq 0$, akkor $8x \leq 5$, vagyis

$$x \leq \frac{5}{8} = 0,625.$$



– Ha $3x - 4 \geq 0$, akkor $3x \geq 4$, vagyis

$$x \geq \frac{4}{3} \approx 1,33.$$



Azt tapasztaljuk, hogy *nincs* olyan szám, amely szóba jöhetne, mert ha egy szám kisebb 0,625-nél, akkor nem lehet nagyobb $\frac{4}{3}$ -nál. Itt tehát kár lett volna hozzáfogni az egyenlet megoldásához, mert biztosan nincs megoldása.

- 3.** Oldjuk meg a valós számok halmazán mint alaphalmazon a $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+3} = 2$ egyenletet!

Emeld négyzetre a $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+3} = 2$ egyenlet két oldalán álló számot, majd folytasd az egyenlet megoldását! Ezután rendezd a kapott egyenletet úgy, hogy az egyik oldalon csak egy négyzetgyökös kifejezés legyen, majd végezz még egy négyzetre emelést!

- 4.** Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x^2+3} + \sqrt{4-3x^2} = 3$

b) $\sqrt{2x^2+1} = \sqrt{5-x^2} - x$



FELADAT

Arany Miklós gazdasági tanácsadó. Egy nagy nemzetközi kozmetikai cég – a MyCream☺ – magyarországi laboratóriumának vezetője kérte fel egy munkára. Tájékoztatta, hogy

- az elmúlt három negyedévben rendre 525 millió, 566 millió, illetve 486 millió forint volt a MyCream☺ bevétele,
- a bevétel egy részét a laboratórium kapja, ebből kell fedeznie a rezsit, a bérköltséget, és ebből képezhet tartalékot a laboratórium fejlesztésére,
- az előző negyedévekben a bérköltség mindig a MyCream☺ bevételének 2%-a volt,
- mindegyik negyedévben 125 millió forint volt a laboratórium rezsije,
- az elmúlt három negyedévben rendre 9,50 milliót, 9,68 milliót, illetve 9,28 milliót tudtak tartalékolni fejlesztési célokra.

A vezető a következő pontokban fogalmazta meg kérését, illetve kérdéseit:

- Arany úr készítsen olyan matematikai modellt, amely megmutatja, hány millió forint tartalék jut negyedévenként a laboratórium fejlesztésére a bevétel függvényében!
- Mekkora negyedéves bevétel esetén lesz ez a tartalék 10 millió forint?
- Elérhető-e – Arany úr modellje szerint – a negyedévenkénti 15 milliós tartalékképzés?

Arany úr munkához látott. Kövesd nyomon gondolatait és számításait!

- Először kiszámolta, mennyi maradt a cég bevételéből a 125 milliós rezszi kifizetése után. Aztán megnézte, mennyi a laboratóriumi bérköltség és a tartalék összege. Kitöltött egy táblázatot, ekkor kapcsolatot fedezett fel a két kiszámított összeg között. Milyen kapcsolatot fedezhetett fel Arany úr? A füzetedben dolgozz!

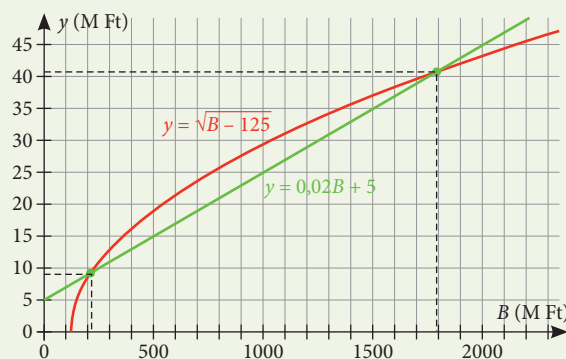
Bevétel (millió Ft)	525	566	486
Bevétel – 125 (millió Ft)			
Bérköltség (millió Ft)			
Bérköltség + tartalék (millió Ft)			
Kapcsolat			

- A fentiek alapján a következő modellt készítette el: Ha a MyCream☺ bevétele B millió Ft és a laboratórium fejlesztési tartaléka T millió Ft, akkor $\sqrt{B - 125} = 0,02B + T$.
Ellenőrizd, megfelel-e ez az egyenlet az elmúlt három negyedév adatainak!

- Ha a következő negyedévben a kereslet hanyatlása miatt csak 400 millió forint bevételt érne el a MyCream☺ Magyarországon, akkor a modell szerint hány millió forintot tehetne a laboratórium fejlesztési tartalékába?

- Arany úr készített egy grafikont is a modelljéhez. Ezen azt vizsgálta, hogy hány millió forint bevétel esetén érhető el az 5 milliós tartalékképzés.

- Milyen eredményre jutott Arany úr?



- Ábrázold a 2. feladatban kiszámított tartalékképzéshez tartozó $y = 0,02B + T$ félegyenest is ugyanebben a koordináta-rendszerben a füzetedben! Törekedj minél pontosabb ábrázolásra!

- c) Igaz-e, hogy növekvő bevételhez növekvő tartalék tartozik?
- d) Körülbelül mekkora lehet a legnagyobb tartalék, amely a modell szerint elérhető? Minél pontosabb ábrát készítesz, annál pontosabb lesz a válaszod.

4 Számítsd ki a modell alapján B -t, ha $T = 10$! Fogalmazd meg szavakkal, mit jelent az eredményed! Rajzold meg az előző koordináta-rendszerben a tartalékképzésnek megfelelő félegyenest, és add meg az egyenes egyenletét is!

5 Írd fel a modell alapján az egyenletet, ha $T = 15$, és oldd meg! Fogalmazd meg Arany úr számára a megfigyelésedet! Rajzold meg a tartalékképzésnek megfelelő félegyenest a megadott koordináta-rendszerben!

- 6** a) A $T = 0$ esethez mekkora bevétel tartozik a modell szerint? Mit jelentene a valóságban a laboratórium számára ez a helyzet?
- b) Arany úr modellje „nem működik”, ha a bevétel kisebb 125 millió forintnál. Okoz-e gondot a cég szempontjából a modellnek ez a „hiányossága”?

7 Egy új kisvállalat, a Krémvarázs csatlakozott a MyCream[©] kozmetikai céghez. A cég megbízta Arany urat, vizsgálja meg, hogy eléggé jövedelmező-e a kisvállalatnál az arckrémgyártás. A kisvállalat jelenlegi helyzetéről Sima Bianka gyártásvezető így tájékoztatja Arany urat:

– Nagy a kereslet a pattanásokat gyorsan megszüntető Bakfis[©] krémünk iránt. A legújabb piackutatások szerint havi x kilogramm krém termelése esetén az

összes megtermelt krém értékesíteni tudjuk, mégpedig $(30 - 0,02x)$ euró/kg áron. Vagyis az x kg Bakfis[©] krém eladása esetén a havi árbevételünk $x(30 - 0,02x) = 30x - 0,02x^2$ (euró) lesz.

Most közbeszól Szigor Lajos művezető:

– Bianka asszony tervei szerint 350 kg krém kellene havonta gyártanunk, de én meg tudnám szervezni 400 kg gyártását is.

– És mennyi a termelési költség? – érdeklődik Arany úr. Bianka asszony átad neki egy iratot. Ebből kiderül, hogy havi x kg termelése esetén a termelési költség $0,1x^2 - 50x + 10\,000$ (euró).

- a) Mekkora árbevételt ér el a kisvállalat, ha Sima Bianka, illetve ha Szigor Lajos javaslatának megfelelő mennyiségű krém gyártanak (és értékesítenek) havonta?
- b) Mekkora a költség, ha Sima Bianka, illetve ha Szigor Lajos javaslatának megfelelő mennyiségű krém gyártanak (és értékesítenek) havonta?
- c) Vázold fel a bevétel és a költség függvényének grafikonját [a $b(x) = 30x - 0,02x^2$ és a $k(x) = 0,1x^2 - 50x + 10\,000$ hozzárendelési szabályú függvényeket, ha $x \geq 0$!]
- d) Hány kg termék eladása esetén a legnagyobb a havi bevétel?
- e) Hány kg termék eladása esetén a legkisebb a havi költség?
- f) Mekkora a profit (a bevétel és a költség különbsége) akkor, ha Sima, illetve ha Szigor javaslatának megfelelő a gyártás mennyisége?
- g) Hány kg havi termelés mellett egyenlő a bevétel a költséggel?

Figyeld meg: a legnagyobb nyereség nem feltétlenül a legnagyobb árbevétel esetében vagy a legkisebb költség esetében lép fel.



FELADAT

1. Adj meg olyan másodfokú egyenletet, melynek két gyöke:

a) 12 és 21

b) $-\frac{3}{7}$ és $-\frac{17}{10}$

2. Egy téglalap egyik oldala 7 dm-rel hosszabb, mint a másik oldala, területe $4,5 \text{ m}^2$. Mekkora a téglalap átlója?

3. Oldd meg az egyenleteket!

a) $289 - (x + 7)^2 = 0$

b) $(x - 5)(x - 2) = 10$

c) $\frac{3x}{x+4} + \frac{3}{x^2-16} = 2$

d) $\frac{x^2+7x+12}{x^2-5x-24} = -1,2$

e) $\sqrt{2x+11} = x-12$

4. Egy vállalkozás növelni szeretné a havonta legyártott alkatrészek számát. Ehhez két korszerűsítés bevezetését tervezi. Egyrészt új gépeket is üzembe állít. Másrészt új számítógépes programot fog alkalmazni, amelynek vezérlésével több alkatrészt tud legyártani minden egyes gépük. A gépek számának százalékos növelése kétszer annyi, mint az új számítógépes program következtében a gépek hatékonyságának százalékos növekedése. Hány százalékkal nő a gépek száma, ha a legyártott alkatrészek száma 25%-kal növekszik?

5. Egy hajó két folyóparti város között közlekedik. A folyó sebessége $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. A két város 45 km-re van egymástól. A hajó teljes, oda-vissza útra vonatkozó menetideje 6 óra 30 perc, de ebből 15 percet vesz igénybe a kikötés, a kiszállás és a beszállás. Mekkora a hajó sebessége állóvízben, a folyón felfelé és a folyón lefelé?

TUDÁSPRÓBA I.

1. Oldd meg az egyenleteket!

a) $3 - 5x + 9x^2 = 10 - x + 6x^2$

b) $6x^2 = 9x$

2. Oldd meg a következő egyenleteket!

a) $(2x+1)^2 = (x+7)^2 - 51$

b) $\frac{3x+2}{x+4} + \frac{x}{x+1} = 2$

3. Egy DVD-felvevő árát annyi százalékkal csökkentették, ahány ezer forintba eredetileg került. Az új ára 18 240 forint. Hány százalékos lehetett a csökkentés?

4. Péter és Pál, ketten együtt 6 óra alatt ásna fel egy területet. Ha csak egyikük dolgozna, akkor ugyanezt a területet 5 órával több idő alatt ásna fel Péter, mint Pál.

Mennyi ideig tartana nekik külön-külön a munka?

5. Egy téglalap alakú, halvány színű karton közepére egy $10 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ -es, téglalap alakú fényképet ragasztunk. A fénykép körül minden oldalon ugyanolyan széles sáv marad. A karton területe 165 cm^2 . Mekkora a karton oldalai?



TUDÁSPRÓBA II.

1. Oldd meg az egyenleteket!

a) $3 - 6x + 9x^2 = 10 - x + 7x^2$

b) $16x = 5x^2$

2. Oldd meg a következő egyenleteket!

a) $144 - (x - 4)^2 = 2(x + 5)^2 - 45x$

b) $\sqrt{5x + 14} = x + 4$

3. Egy számnak és a reciprokanak összege $\frac{13}{6}$. Határozd meg a számokat!

4. Anna és Dóra együtt állnak neki egy munkának. 8 óra elteltével vége a munkaidőnek, Anna hazamegy, a munkát azonban még nem fejezték be. Dóra még benn marad, és egy óra alatt befejezi a munkát. Ha csak egyedül kellett volna elvégezni a feladatot, akkor Dórának 2 órával több időre lett volna szüksége, mint Annának. Mennyi időbe telne nekik a feladat külön-külön?

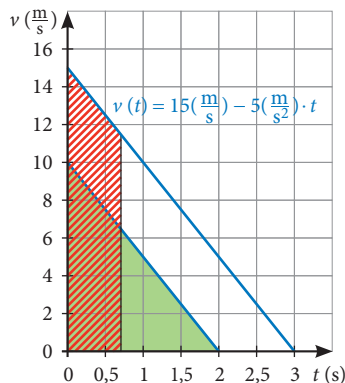
5. Egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága 24 mm. Ez a magasság két olyan részre osztja az átfogót, hogy az egyik 20 mm-rel hosszabb, mint a másik. Mekkora a háromszög átfogója?

RÁADÁS

A Tóth család személygépkocsija $36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad a 40-es korlátozású zónában. A mögötte lévő autó dühösen előzni kezdi, $54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. Amikor a két kocsi éppen egymás mellett halad, egyszerre pillantanak meg egy útestre kiguruló labdát maguk előtt, és mindketten azonnal fékezni kezdenek. Tóth apuka éppen le tud fékezni a labda előtt. A család ijedten nézi, hogy a másik autó elszáguld a labda mellett.

– Vajon mekkora sebességgel ért a másik autó a labdához?

a) A legnagyobb gyerek egy grafikont rajzol az esetről, és így magyarázza a többieknek:



– Íme, az alsó egyenes a mi sebességünk, $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességről lassultunk le. Én azt hiszem, nagyjából 2 másodperc volt az az idő, tehát úgy $5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ lehetett a lassulásunk. A mellettünk lévő kocsi 3 másodperc alatt lassult volna le. A megtett út a sebességfüggvény grafikonja és az időtengely által bezárt alakzat területével egyezik meg, ez nálunk a zöld derékszögű háromszög területe, a másik kocsinál pedig a piros derékszögű trapéz területe.

Mindketten ugyanannyi utat tettünk meg a kiguruló labda vonaláig, tehát a feltételünk, hogy a zöld derékszögű háromszög területe éppen megegyezzen a piros derékszögű trapéz területével.

Számold ki ezek alapján a másik kocsi sebességét!

b) A feladat érdekessége, hogy az eredmény nem függ a lassulástól. Milyen eredményt kapunk, ha nem ismerjük a lassulást?

c) Láthatjátok, hogy a szabálytalanul előző gépkocsi sebessége kevesebb, mint a szabályosan közlekedőké, és még a megengedett korlát alá se tudott jutni! Ha a vezetők reakcióidejével ($\sim 0,2$ mp) is számolunk, az eredményünk már függ a lassulás mértékétől is. $5-6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ lassulás esetén $42 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ körüli értéket kapunk meg.

TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Oldd meg teljes négyzetté kiegészítés módszerével az egyenleteket!

a) $x^2 - 22x = -40$

b) $x^2 + 18x = 40$

2. Oldd meg az egyenleteket!

a) $x^2 + 2x - 99 = 0$

b) $x^2 - 3x - 180 = 0$

c) $x^2 - 6x - 55 = 0$

3. Oldd meg az egyenleteket!

a) $13x^2 + 2x = 0$

b) $4x^2 - 3x = 0$

c) $0,6x^2 - 57 = 0$

d) $1,7x^2 + 34 = 0$

4. Oldd meg az egyenleteket!

a) $56x^2 - 13x - 3 = 0$

b) $7x^2 - 12x + 6 = 0$

c) $40x^2 - x - 15 = 0$

d) $30x^2 + 29x + 4 = 0$

5. Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

a) $6x^2 - 4x - 45 = 35 - 3x^2 + 2x$

b) $x^2 + 5,2x - 3,2 = 0,5x^2 + 1,3x - 2,4$

6. Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

a) $(2x - 9)^2 + (x + 2)^2 = 127 - 3x$

b) $(7x - 1)^2 - 40 = (8x + 3)^2 - 4x$

7. Határozd meg a következő függvény zérushelyeit! Értelmezési tartomány a valós számok halmaza.

a) $x \mapsto \frac{x^2}{12} - \frac{x}{3} - 1$

b) $x \mapsto -\frac{x^2}{3} - \frac{x}{6} + 6$

8. Alakítsd szorzattá a polinomokat!

a) $3x^2 - 4x - 7$ b) $4x^2 - 16x - 9$

9. Adj meg olyan egész együtthatós másodfokú polinomot, melynek zérushelyei

a) $\frac{2}{9}$ és $\frac{11}{3}$ b) $\frac{7}{4}$ és $-\frac{5}{6}$

10. Írd fel az alábbi polinomokat gyöktényezős alakban!

a) $5x^2 + 3x - 8$ b) $0,2x^2 - 0,1x - 2,1$

11. Írj olyan valós számot az ismeretlen együttható helyére, hogy az egyenlet diszkriminánsa 0 legyen!

a) $x^2 + 0,6x + \dots = 0$

b) $3x^2 + 4,2x + \dots = 0$

12. Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

a) $\frac{3}{x} - \frac{2}{x+2} = 1$

b) $\frac{3}{x} + \frac{2}{x+4} = 1$

13. Egy egész számot megszoroztunk a nála 6-tal kisebb egész számmal, majd hozzáadtunk 5-öt. Így 780-at kaptunk. Melyik ez a két szám?

14. December elején kiárusítás volt egy ruhaüzletben, x százalékkal csökkentették az árakat. December utolsó hetében tovább csökkentettek, megint x százalékkal. Így az eredetileg 5700 Ft-os blúz ára december végén csak 4415 Ft volt. Hány százalékos volt az első árleszállítás?

15. Egy családi ház udvara 16,8 m széles és 26,4 m hosszú, téglalap alakú. Az udvar egyik széle mentén egy téglalap alakú díszkertet telepítünk, melyet három oldalról ugyanolyan széles ösvény határol, negyedik oldala a kerítéshez ér, a kert egyik 26,4 m széles oldalánál. Milyen széles az ösvény, ha a díszkert alapterülete 316,1 m²?



16. Egy deltoid hosszabbik átlója 2,6 cm-rel nagyobb, mint a rövidebbik átlója. Területe 2,535 cm². Mekkora az átlói?

17 ☞ Egy deltoidnak két derékszöge van. Rövidebb oldalai 1,8 cm-rel kisebbek, mint a hosszabbik oldalai. Hosszabbik átlója 5,7 cm.

- a) Mekkora az oldalai?
b) Mekkora a területe?

18 ☞ Kerékpáros kiránduláson az első 48 km után csökkenteni kellett a csapat sebességét. A következő 32 km-t $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val lassabban tették meg. Így 4 óra 48 perc alatt tették meg a teljes távot. Mekkora sebességgel haladtak az egyes részeken?

19 ☞ Oldd meg az egyenletet!

$$\frac{x^2 + 8x + 16}{x + 4} = 0$$

20 ☞ Ekvivalens-e egymással az $\mathbf{R}$ alaphalmazon a következő két-két egyenlet?

- a) $(x + 3)^2 = 16$ és $x + 3 = -4$
b) $2x + 3\sqrt{x} = 3\sqrt{x} - 8$ és $2x = -8$

21 ☞ Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán! Mindegyik esetben állapítsd meg, hogy a megoldás során kapott egyenletek ekvivalensek-e az eredeti egyenlettel!

- a) $\frac{x + 5}{x^2 + 7x + 10} = 5$
b) $\frac{x^2 + 7x + 10}{x + 5} = -3$

22 ☞ Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

- a) $9\sqrt{x - 4} = x - 26$ b) $3\sqrt{2x - 6} = x - 3$

23 ☞ Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

- a) $\sqrt{4 - x} - \sqrt{x + 9} = -1$
b) $\sqrt{4x + 1} + \sqrt{12x + 9} = 14$

24 ☞ Egy sporteszköz 76 000 Ft-ba került januárban. Júniusban felemelték az árát, majd decemberben, az év végi akció keretében kétszer annyi százalékkal csökkentették az árát, mint amennyivel júniusban megemelték. A decemberi akciós ára 71 820 Ft volt. Hány százalékos volt a júniusi áremelés?

25 ☞ Egy derékszögű útkereszteződésből egyszerre indul két jármű, egymásra merőleges irányban. Az egyik jármű sebessége $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val nagyobb, mint a másik

jármű sebessége. 20 perc múlva a két jármű körülbelül 32 km-re lesz egymástól. Mekkora a járművek sebessége?

26 ☞ Egy 48 cm hosszú pálcából deltoid alakú papírsárkányt készítünk. A pálcát kettétörjük, merőlegesen összeillesztjük, ezek lesznek a deltoid átlói. A papírsárkány területe $263,5 \text{ cm}^2$. Milyen hosszúak a deltoid átlói?

27 ☞ Egy 28 m magas toronyból függőlegesen lefelé eldobunk egy kavicsot, $3,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel. Mennyi idő múlva csapódik a talajba? (A közegellenállástól tekintünk el. A függőlegesen lefelé elhajított test által t idő alatt megtett út: $h = v_0 t + \frac{g}{2} t^2$, ahol v_0 a kezdősebesség, és $g \approx 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.)

28 ☞ Egy termék csomagolása négyzet alapú egyenes hasáb. Változtattak a termék méretein, és a hasáb magasságát másfélszer annyi százalékkal csökkentették, mint ahány százalékkal növelték a négyzet alapterületét. Így a doboz térfogata 8,16%-kal csökkent.

- a) Hány százalékkal csökkent a hasáb magassága?
b) Hány százalékkal nőtt a hasáb alapéle?

29 ☞ Egy feladat elvégzésére két gépet állítanak munkába. Ha csak a régebbi gép végezné a munkát, akkor 3 nappal több időre lenne szükség, mintha csak az új gép. Hat napig mindkét gép dolgozik a feladaton, majd a régebbi gépet elviszik, és az új gép egyedül dolgozik tovább. Az új gép további négy nap alatt befejezi a munkát. Hány nap alatt végeznének a feladattal külön-külön?

30 ☞ Egy motorcsónak sebessége állóvízben $24 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. A motorcsónak egy folyón halad 42 km-t felfelé, majd ott egyből megfordul és visszatér a kiindulási pontra. Az oda-vissza út 3 óra 36 percet vesz igénybe. Mekkora a folyó sebessége?

31 ☞ Egy 15 literes edény tele van alkohollal. Kiöntenek belőle valamennyi alkoholt, és helyette ugyanannyi vizet töltenek az edénybe. Jól elkeverik a vizet az alkohollal. Ismét kiöntenek belőle, az előzővel meg egyező térfogatú folyadékot, majd a hiányzó részt ismét vízzel pótolják. A két hígítás után a folyadéknak csak 30%-a alkohol. Hány liter folyadékot öntöttek ki az edényből egy-egy alkalommal?

NÉHÁNY FELADAT VÉGEREDMÉNYE

Bevezető óra: 1. 45,36 A. 4. a) 45,472 A. b) 45,584 A.

1. lecke: 1. b) D; B; B / D / E; D / E. 2. Nincs. 3. a) C. b) C. 4. C, D. 5. a) igaz: A; B, E; hamis: C; D. b) A tagadása: C. 6. a) selejtező: Hosszú, Verrasztó; középdöntő: Verrasztó, Hosszú; döntő: Hosszú, Verrasztó. b) 1,66 mp. c) Lehetséges. d) Biztos. e) Lehetséges. (bronzérmes nyert)

2. lecke: 1. a) 2. b) 2. c) mindegy. d) 2. 2. a) Pál-völgyi iskola. b) piros. c) igen, bronzérmes.

3. lecke: 1. igazak: a), b), d). 3. a) A hamis, B igaz. 4. a) ha $x + 3 = 0$ VAGY $5 - x = 0$. b) ha $x + 3 = 0$ ÉS $5 - x = 0$.

5. ÉS / VAGY / ÉS

4. lecke: 1. b) A: $\{-3\}$; B: $\{5\}$; C: $\{-3; 5\}$; D: $\emptyset$. c) Igen. $A \cup B$: $\{-3; 5\}$. d) Igen. e) Nem. f) Igen. $A \cap B$: $\emptyset$. g) Igen.

3. b) igaz, hamis, igaz. c) igaz, hamis.

5. lecke: 1. Csak bizonyos esetben: a) és c). 2. C. 3. $x \geq -2$ vagy $x < -8$. 4. a) $x = 3$ és $y = 1$. d) $x = 0$ és $y = 0$.

5. a) nincs ilyen.

6. lecke: 1. a) 36. b) 36. c) 22. 2. 4,25 és 0 és 5.

3. a) 1938 ezer Ft. b) 161 500 Ft. c) Többet. d) 120 000 Ft.

4. a) 24,073 g. b) Elfogadható.

7. lecke: 1. a) 250; 200. b) 241; 209. c) 197; 195. d) 200; 200. 2. a) 2712. b) 360. 3. a) 19,5 cm. b) 18 cm. 4. Jocóék udvarának. 5. a) 20,449 millió Ft. b) 2,1 millió Ft, és 8,349 millió Ft. c) 5,2245 millió Ft. d) 1,43-szoros. 4,3 millió Ft és 6,149 millió Ft.

8. lecke: 1. a) $p = 278$; $q = 311$; $x = 369$; $y = 391$; $z = 466$; $v = 524$. b) 2-szerese. c) Egyenlők. $\approx 1,059$. 2. 2,5 millió Ft. 3. a) összesen 329,1 km. b) kevesebb. c) egyenlő. d) 65,82 km.

4. a) 12 322. b) 1161. c) 12 322, ugyanennyi. d) 11%-os. 5. a) 3,36 millió Ft, és 2,856 millió Ft. b) 32%-ot. c) 2,859 millió Ft. d) 17,538%.

9. lecke: 1. a) 20 és 2,5. b) 24 és 3. c) 60 és 1,2. 4. a) 28. b) 150. c) 1900. d) 432. 5. $2\sqrt{3}$; $2\sqrt{5}$; $10\sqrt{3}$; $3\sqrt{5}$; $5\sqrt{a}$.

6. a) $3\sqrt{a}$. b) $3\sqrt{2}$. 7. a) $12 + 2\sqrt{35}$. b) $24 + 2\sqrt{143}$.

8. a) $\sqrt{102}$. b) $\sqrt{195}$.

10. lecke: 1. a) 7 cm. b) 11 cm. c) $\sqrt{57}$ cm. d) $\sqrt{T}$ cm. 2. a) 7 és -7. b) 11 és -11. c) $\sqrt{57}$ és $-\sqrt{57}$. d) $\sqrt{T}$ és $-\sqrt{T}$. 3. 15; 20; 60; 70; 3; 6; 50. 4. 5; 5; 11; 11; $|a|$. 5. a) 2.

b) -18. c) $12 + 2 \cdot \sqrt{35}$. d) $32 - 10 \cdot \sqrt{7}$. 6. a) 2. b) 0,4. c) $\sqrt{3}$.

d) $\sqrt{2}$. e) $3 \cdot \sqrt{2}$. f) $0,2 \cdot \sqrt{2}$. 7. a) $\sqrt{5}$. b) $4 \cdot \sqrt{5}$.

c) $2,4 \cdot \sqrt{5}$. d) $\sqrt{2}$. e) 10. f) $0,05 \cdot \sqrt{5}$. 8. a) $a = \sqrt{5}$ cm;

$b = \sqrt{2}$ cm. b) $7 + 2 \cdot \sqrt{10}$ cm². c) $\sqrt{7}$ cm. 9. b) $\approx 6,93$.

c) $4 \cdot \sqrt{3}$.

11. lecke: 1. a) 25. b) 4,5. c) 78. d) $\frac{1}{6}$. 2. a) 78. b) 21.

3. a) $-2\sqrt{2}$. b) $12\sqrt{3}$. c) 325. 4. területek: 28, 26, 29 és 30; kerületek: $2\sqrt{26} + 2\sqrt{40}$, $2\sqrt{13} + 2\sqrt{52}$, $2\sqrt{58} + \sqrt{116}$, $4\sqrt{20} + \sqrt{40}$. 5. a) kétszerese. b) 10 cm². c) $10\sqrt{2}$ cm.

6. a) $6\sqrt{3}$ cm. b) $27\sqrt{3}$ cm². c) 12 cm, $36\sqrt{3}$ cm².

7. a) lehet, derékszögű. b) nem lehet. c) lehet.

13. lecke: 1. 36° , 36° , 108° . 2. 108° , 72° , 4 cm. 3. a) 5. b) 36° , 36° , 108° , 36° , 72° , 72° . 4. III. alapeset. 5. II. alapeset, 90° -os elforgatás. 6. igazak: a) c) d).

14. lecke: 1. IV. alapeset. 2. a) II. alapeset. 3. a) ≈ 14 m. b) gúla. 4. ≈ 29 m.

15. lecke: 1. a) 2,45 cm. b) 3,87 cm. c) 6,1 cm². 2. a) 20 cm. b) 22,4 cm. 3. a) 17 cm. b) 13,2 cm és 3,8 cm. c) 7,1 cm. 4. 3 cm és 9 cm. 5. hamis: h) i).

16. lecke: 1. a) 5 cm. b) 2 cm. c) 5 cm². 2. b) 4 cm. 4. a) 3,5 cm. 5. 8 cm

18. lecke: 1. a) 16 cm, 8 cm, 8 cm, 12 cm, 4 cm. b) 120° , 60° , 60° , 90° , 30° . 2. a) 18,3 cm, 20,9 cm. b) 458 cm², 523 cm².

3. 2 cm², 1 cm², 1 cm², 1,5 cm², 0,5 cm². 4. a) 22,4 cm, 134,4 cm². b) 52 mm, 4720 mm². c) $57,3^\circ$, 50 m². 5. 5092 km.

19. lecke: 1. a) 100° , 160° , 20° , 80° . b) $51,4^\circ$, $77,1^\circ$, $102,9^\circ$. 2. ≈ 3050 km. 3. a) 6,28 m. b) 1 m. c) 2,8 m. 4. a) 113 cm². b) 7,63 m². 5. a) 138 cm². b) 57 cm.

20. lecke: 1. a) 36° . b) 2182° . 6. c) 16. sor. d) 27,4 mm. 2. a) 42-43 cm. b) 251 cm². 3. a) $\approx 0,041^\circ$. b) 107 600 km. c) $8,1 \cdot 10^{12}$ km². 4. a) 34. b) 189.

21. lecke: 1. a) II. alapeset. 2. b) 3,2 cm. c) 3,7 cm és 5,9 cm. 3. a) 7,1 cm és 7,1 cm. b) 4,5 cm és 8,9 cm. 4. 5760 km. 5. a) 74%. b) 418 m² (38,5%).

23. lecke: 2. a) 15 000 Ft, 20 000 Ft. b) 20 pólót már ingyen kellene adni. c) $4000 - 200x$; $x(4000 - 200x)$.

24. lecke: 2. a) függvény: B), C). 3. a) 85 km. b) 100 km. c) drágább; meredekebb. d) 7,2 euró. e) 0,12 euró; 0,18 euró. f) 14,4 euró. 4. b) R. c) R. d) $x \mapsto -0,5x + 4,5$.

26. lecke: 2. a) x^2 ; $x^2 - 4$; $(x + 3)^2$. b) $|x|$; $|x - 4|$; $|x| - 3$. c) $\sqrt{x}$; $\sqrt{x} - 1$; $\sqrt{x} + 4$. 3. g: $y = f(x) + 2$; h: $y = f(x + 2)$

27. lecke: 3. a) kék: $k(x) = |x|$, piros: $p(x) = -0,25|x|$. b) kék: $k(x) = x^2$ piros: $p(x) = 0,25x^2$. c) kék: $k(x) = x$, piros: $p(x) = -3x$. 4. $y = -2f(x)$ barna; $y = \frac{1}{2}f(x)$ piros; $y = \frac{1}{3}f(x)$ kék.

28. lecke: 3. a) $f(x) = x^2$ $g(x) = 0,5x^2 - 2$.

b) $f(x) = -|x + 3|$ $g(x) = -|x + 3| - 2$.

c) $f(x) = -0,5(x - 3)^2$ $g(x) = -0,5(x - 3)^2 + 2$.

5. a) 1 és 3. b) 1 és 3. c) $2 - \sqrt{1,5}$ és $2 + \sqrt{1,5}$.

29. lecke: 1. a) $x \mapsto x^2 - 6x + 5$. b) (3; -4). c) $x = 3$ helyen.

2. 2. 3. a) $a = 1$, $b = -4$, $c = 5$; minimum. b) $a = 1$, $b = 8$, $c = 12$; minimum. c) $a = -0,5$, $b = 2$, $c = -2$; maximum. d) $a = -3$, $b = 18$, $c = 0$; maximum. 4. a) 1; 2; 9.

30. lecke: 1. a) $x_1 = 0$ és $x_2 = 8$. b) $x_1 = 0$ és $x_2 = -3,2$. c) $x_1 = 0$ és $x_2 = 4$. d) $x_1 = 0$ és $x_2 = -6$. 2. g minimum helye -2,5, minimuma -3,25. 3. g maximum helye 2, maximum értéke -2. 4. f minimum helye 11, minimuma -12,1; g minimum helye 11, minimuma -6,3.

31. lecke: 1. a) 0; -112; -56. b) 0; 12; 6. 3. a) 20,8 l; 7,6 l. b) 13 km; 7,7 l. c) 10 200 kg; 23 648 kg. 4. b) 2,5 kg. 5. a) $10 - x$; $x(10 - x)$. c) 5.

33. lecke: 2. a) 3 és -5. b) 4 és -7. c) 2 és 10. d) -2 és -8. 3. a) 4 és -4. b) 0 és 5. c) 2 és 6. 4. 11-en.

34. lecke: 1. a) 1,5 és -4,5. b) 1 és -1,8. 2. a) 4 és -5,5. b) 2 és 3. c) $\frac{-11 \pm \sqrt{281}}{10}$. 3. a) 166,7 és 500. c) $\approx 333,3$ -nál, értéke ≈ 3333 . 4. a) 3-nál kisebb szám. b) 3. c) 3-nál nagyobb szám.

35. lecke: 1. a) 0 és $-\frac{8}{3}$. b) $\sqrt{3}$ és $-\sqrt{3}$. 2. a) 4,5 és $\frac{1}{3}$. b) 3,5 és -0,6. 3. a) 3 és -1,5. b) 0,6 és 3. 4. a) $-2 \pm \sqrt{10}$. b) nincs zérushelye.

5. a) $2x^2 - 6x + 2,5 = 0$. b) $3x^2 - 8x + 4 = 0$. 6. a) $\frac{9}{7}$. b) $-\frac{25}{8}$. c) nincs megoldás. 7. 36 és 37 vagy -37 és -36.

36. lecke: 1. a gyökök száma: 2, 0, 2, 1. 2. a) -2 és 1. b) 1,2 és 3,5. c) -7 és -4. 3. -2; -1; 0, és 10; 11; 12. 4. a) lehetetlen. b) lehetetlen. c) biztos. 5. mindegyik lehetséges.

37. lecke: 2. a) $2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 5)$. b) $5(x + 1)(x + 1,6)$.

3. 2,5 és $\frac{4}{3}$. 4. a) 2. b) $\frac{7}{6}$. c) $\frac{1}{3}$. 6. 13; 8; 7; -7; -8; -13.

Ráadás lecke: 1. a) 2 és 4. b) 2 és 10. c) -2 és -5. d) 4 és -5. 2. a) nincs gyök. b) 30. 3. a) $\frac{3}{7}$. b) $-\frac{153}{8}$. 4. a) $\frac{65}{4}$. b) $\frac{\sqrt{65}}{2}$. c) $3\frac{\sqrt{65}}{8}$.

39. lecke: 1. 25 cm. 2. 100 mm, 60 mm, 80 mm. 3. 2,5 m. 4. a) 13. b) 103. c) 33. 5. a) 13 cm és $\frac{119}{12}$ cm. b) a másodiké. 6. 20 cm, 40 cm.

40. lecke: 1. 2,5 óra. 2. 0,2 és -5. 3. $\frac{5}{2}$. 4. $\approx 5,9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. 5. Első 2 m, hátsó 4 m.

41. lecke: 1. e) 20 vagy 90 fős. 2. 19-en. 3. 10 és 15. 4. 12 Ft.

42. lecke: 1. 30 óra. 2. a) 140 óra. b) 48%; 28%; 24%. c) $\approx 93,3$ óra. 3. a) 330 720 Ft. b) 10% és 8%. 4. a) 1,5%. b) 2,82%. 5. hamis: a) és c).

43. lecke: 1. a) igen. b) nem. c) nem. 2. a) nem. b) nem. c) igen. 3. a) -20 és 6. b) -7,5 és 10. 4. a) 6. b) $-\frac{13}{7}$ és 6.

44. lecke: 1. a) [4,5; ∞] e) 6 gyöke; 2,75 nem gyöke. 2. a) 4. b) 2. 3. a) [-14; 16]. b) [4; ∞]. 4. -3.

Ráadás lecke: 2. $T = 8,58$ millió Ft. 3. a) kb. 210 és 1800 millió Ft között. c) nem. d) kb. 10,4 millió Ft. 4. 750 millió Ft, $y = 0,02B + 10$. 6. a) 132 millió Ft, 2368 millió Ft.

7. a) 8050 euro; 8800 euró. b) 4750 euró; 6000 euró. d) 750 kg. e) 250 kg. f) 3300 euró, 2800 euró. g) 166,7 kg; 500 kg.

45. lecke: 2. $\approx 30,8$ dm. 3. a) -24 és 10. b) 0 és 7. c) 5 és 7. d) $\frac{28}{11}$. e) 19. 4. 16%. 5. 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$; 12 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ és 18 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

TÁRGYMUTATÓ

befogótétel 47

diszkrimináns 100

ekvivalencia 17

ekvivalens egyenletek 123

érintő szárú kerületi szög 60

érintőnégszög 65

értékkészlet 78

értelmezési tartomány 78

és-művelet (konjunkció) 15

gyöktényező alak (polinomé) 106

gyökvonás azonosságai 33

harmonikus közép 49

háromszögek egybevágóságának alapesetei 41

húrnégyszög 64

implikáció 17

képhalmaz 78

kerületi szög 60

körcikk 54

körív 54

középponti szög 54

látókörv 61

logikai állítás 7

logikai művelet 15

magasságtétel 47

másodfokú függvény 88

maximumhely (függvényé) 78

megoldóképlet (másodfokú egyenleté) 100

mértani közép 26

minimumhely (függvényé) 78

monotonitás 78

négyzetes közép 49

négyzetgyök 26

nevező gyöktelenítése 35

parabola 85

sokszögek egybevágósága 43

számítási és mértani közép közti

egyenlőtlenség 27

számítási közép 26

teljes négyzetté kiegészítés 89

vagy-művelet (diszjunkció) 15

Viète-formulák 107

zérushely 78

TARTALOM

Előszó – A tankönyv témakörei	3
Ráadás – Bevezető óra	4

LOGIKA

1 Igaz vagy hamis	6
2 Igaz vagy hamis? Foglaljuk táblázatba!	10
3 Összetett állítások	14
4 Vagy-művelet, És-művelet nyitott mondatok esetében	18
5 Gyakorlás, tudáspróba	22
Témazáró feladatgyűjtemény	23

KÖZÉPÉRTÉKEK ÉS A NÉGYZETGYÖK

6 Átlag, számtani közép	24
7 Számtani közép, mértani közép	26
8 Változások	30
9 A gyökvonás azonosságai	32
10 Négyzetgyökös feladatok	34
11 Gyakorlás	36
12 Tudáspróba	38
Témazáró feladatgyűjtemény	39

GEOMETRIAI MÉRÉSEK, SZÁMÍTÁSOK

13 Háromszögek egybevágóságának alapesetei ..	40
14 Egybevágó háromszögek	44
15 Magasságtétel, befogótétel	46
16 Mértani közép a geometriában	50
17 Gyakorlás	52
18 Középponti szög, körív, körcikk	54
19 Gyakorlás	58
20 Körívek, körcikkek a mindennapokban	62
21 Ismétlés	66
22 Tudáspróba	68
Témazáró feladatgyűjtemény	70

MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK

23 Függvények egy-egy konkrét problémához ...	72
24 Amit már tanultunk a függvényekről	74
25 A függvények jellemzői	76
26 „Fel”-„le”, „jobbra”-„balra”	80
27 „soványabb”, „kövérebb”	82
28 Összetett függvénytranszformációk	86
29 Másodfokú függvények	88
30 Másodfokú függvény ábrázolása	90
31 Gyakorlás, alkalmazás	92
32 Tudáspróba	94
Témazáró feladatgyűjtemény	96

MÁSODFOKÚ EGYENLETEK

33 Egyenletek, algebrai átalakítások	98
34 A másodfokú egyenlet megoldóképlete	100
35 Alkalmazzuk a megoldóképletet!	102
36 Diszkrimináns	104
37 Polinom gyöktényezőss alakja	106
Ráadás – Alkalmazzuk a Viète-formulákat!	108
38 Csoportverseny	110
39 Szöveges feladatok geometriáról	112
40 Szöveges feladatok mozgásokról és törtékről	114
41 Szöveges feladatok	116
42 Szöveges feladatok munkavégzésről és pénzügyekről	118
43 Ekvivalens egyenletek	122
44 Gyökös egyenletek	124
Ráadás – Laboratóriumi fejlesztések	128
45 Gyakorlás, tudáspróba	130
Témazáró feladatgyűjtemény	132
Néhány feladat végeredménye	134
Tárgymutató	135
Tartalom	136